

令和 9 年度

専門課程 推薦入試 参考問題 その 2

数学 I

解答時間 60 分

問題 & 解答・解説

※問題で示す図形は、図中の寸法の数字を正確に反映するものではない。

※本番の入試問題は解の選択肢が与えられる選択式であるが、この参考問題では選択肢は提示しない。

1 次の[1]～[4]にあてはまるものを、下記の【解答群】ア～オの中からそれぞれ1つ選び、解答欄に記入しなさい。

(1) 次の式を展開すると、[1]となる。

$$\frac{\sqrt{48.4}}{3} - \sqrt{0.225}$$

解答例

個々の項について展開すると、

$$\sqrt{48.4} = \sqrt{\frac{484}{10}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 11^2}{10}} = \frac{2 \times 11}{\sqrt{10}} = \frac{2 \times 11\sqrt{10}}{10} = \frac{11\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{48.4}}{3} = \frac{11\sqrt{10}}{3 \times 5}$$

$$\sqrt{0.225} = \sqrt{\frac{225}{10^3}} = \sqrt{\frac{3^2 \times 5^2}{10^3}} = \frac{3 \times 5}{\sqrt{10^3}} = \frac{3 \times 5}{10\sqrt{10}} = \frac{3 \times 5\sqrt{10}}{10 \times 10} = \frac{3\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{2 \times 2 \times 5}$$

以上を与式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{48.4}}{3} - \sqrt{0.225} &= \frac{11\sqrt{10}}{3 \times 5} - \frac{3\sqrt{10}}{2 \times 2 \times 5} = \frac{4 \times 11\sqrt{10} - 3 \times 3\sqrt{10}}{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{44\sqrt{10} - 9\sqrt{10}}{2 \times 2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{35\sqrt{10}}{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{7\sqrt{10}}{2 \times 2 \times 3} = \frac{7\sqrt{10}}{12} \dots \text{A} \end{aligned}$$

※平方根の展開や分数の計算では、素因数分解が重要。

※上で、以下のすだれ算による素因数分解を利用。

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 225} \\ 5 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

(2)

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}, b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$$

のとき、次の式の値は[2]である。

$$a^2 + 3ab + b^2$$

解答例

a と b の分母を有理化すると、

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{5-2^2} = \sqrt{10}-2\sqrt{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{5-2^2} = \sqrt{10}+2\sqrt{2}$$

与式を展開して、以上を代入すると、

$$\begin{aligned} a^2 + 3ab + b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + ab = (a+b)^2 + ab \\ &= (\sqrt{10}-2\sqrt{2} + \sqrt{10}+2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10}-2\sqrt{2})(\sqrt{10}+2\sqrt{2}) \\ &= (2\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 2^2 \times 10 + 10 - 2^2 \times 2 \\ &= 40 + 10 - 8 = 42 \cdots \text{A} \end{aligned}$$

※上で、 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ の公式を利用して分母を有理化した。

また、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の公式を利用した。

(3) a と b は実数である。 $-3 < a < 1, -1 \leq b \leq 2$ のとき、 $a^2 - b^2$ の値の取り得る範囲は[3]である。

解答例

a の範囲も、 b の範囲も0（ゼロ）を跨ぐので、 a^2 と $-b^2$ の値の取り得る範囲は、

$$\begin{cases} 0 < a^2 < (-3)^2 \\ -(-2)^2 \leq -b^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a^2 < 9 \\ -4 \leq -b^2 \leq 0 \end{cases}$$

よって、両者の和である $a^2 + (-b^2) = a^2 - b^2$ は、

$$0 + (-4) < a^2 - b^2 < 9 + 0$$

$$-4 < a^2 - b^2 < 9 \cdots A$$

※不等号が、いずれも $\leq$ ではなく、 $<$ であることに注意。

(4) $A = 3x - 2y, B = -x + y, C = x^2 - 2$ のとき、次の式を展開すると、[4]となる。

$$AC + 2BC$$

解答例

与式を展開し、3 式を代入すると、

$$\begin{aligned} AC + 2BC &= (A + 2B)C = \{3x - 2y + 2(-x + y)\}C = (3x - 2y - 2x + 2y)(x^2 - 2) \\ &= x(x^2 - 2) = x^3 - 2x \cdots A \end{aligned}$$

2

次の[1]～[4]にあてはまるものを、下記の【解答群】ア～オの中からそれぞれ1つ選び、解答欄に記入しなさい。

(1) 次の式を展開すると、[1]となる。

$$\frac{(-2xy^3)^3(-5x^4y)}{-2x^2y^2}$$

解答例

まず、分子を展開すると、

$$(-2xy^3)^3(-5x^4y) = (-1)^{3+1} \times 2^3 \times 5x^3y^{3 \times 3} \times x^4y = 2^3 \times 5x^{3+4}y^{3 \times 3+1} = 2^3 \times 5x^7y^{10}$$

これを用いて与式の分数を展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{(-2xy^3)^3(-5x^4y)}{-2x^2y^2} &= \frac{2^3 \times 5x^7y^{10}}{-2x^2y^2} = -2^{3-1} \times 5x^{7-2}y^{10-2} = -2^2 \times 5x^5y^8 \\ &= -20x^5y^8 \dots \text{A} \end{aligned}$$

※上で、 $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{m \times n}$ の公式を利用。

(2) 次の式を展開すると、 x^2 の係数は[2]である。

$$\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{3}{2}\right)$$

解答例

x^2 の係数は、3つの積の和からなるので、

$$\begin{aligned} 1 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} &= \frac{3}{2} - \frac{5}{3^2} + \frac{5}{2 \times 3} = \frac{3 \times 3^2 - 5 \times 2 + 5 \times 3}{2 \times 3^2} = \frac{27 - 10 + 15}{2 \times 3^2} \\ &= \frac{32}{2 \times 3^2} = \frac{16}{3^2} = \frac{16}{9} \dots \text{A} \end{aligned}$$

※上のように、分数の計算では素因数分解が重要。

(3) x, y, e, b, c, d は実数である。次の因数分解の式において、 $d = [3]$ である。

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 11y - 6 = (x + ay + b)(cx + y + d)$$

解答例

与式の右辺を展開すると、

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 11y - 6 = cx^2 + (ac + 1)xy + ay^2 + (bc + d)x + (b + ad)y + bd$$

上式が成り立つためには、 x^2 と y^2 の係数より、

$$\begin{cases} a = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

x と y の係数より、

$$\begin{cases} bc + d = 1 \\ b + ad = 11 \end{cases}$$

上で求めた a と b を代入すると、

$$\begin{cases} 2b + d = 1 \\ b - 3d = 11 \end{cases}$$

上の連立方程式を d について解くと、

$$7d = -21$$

$$d = -3 \cdots A$$

蛇足ですが、さらに解析を進めると、上の連立方程式より、

$$b = 2$$

よって、因数分解は、

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 11y - 6 = (x - 3y + 2)(2x + y - 3)$$

(4) 次の等式の解は[4]である。

$$|x - 1| - 2|x - 2| = -3$$

解答例

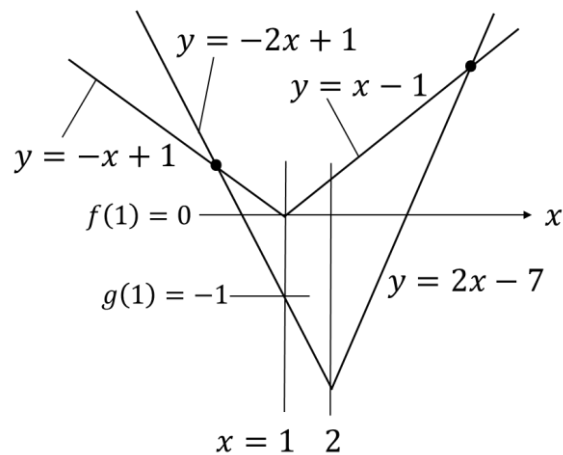
与式を展開し、絶対値の式を左辺と右辺に分けると、

$$|x - 1| = 2|x - 2| - 3$$

$$y = f(x) = |x - 1|$$

$$y = g(x) = 2|x - 2| - 3$$

とにおいて、下図のようなグラフを描く。作図の際には、 $y = 2|x - 2| - 3$ のグラフは
 $y = 2|x - 2|$ のV字が下に -3 だけ移動すること、および $g(1) < f(1)$ に留意する。



グラフより、左の交点では、 $y = -x + 1$ と $y = -2x + 1$ が成り立つので、

$$-x + 1 = -2x + 1$$

$$x = 0$$

右の交点では、 $y = x - 1$ と $y = 2x - 7$ が成り立つので、

$$x - 1 = 2x - 7$$

$$x = 6$$

よって、

$$x = 0, 6 \cdots A$$

※ $y = |ax + b|$ のグラフは、 x 切片でV字に折れ曲がることに留意して作図する。

3

次の[1]～[5]にあてはまるものを、下記の【解答群】ア～オの中からそれぞれ1つ選び、解答欄に記入しなさい。

(1) 次の方程式の解は $x = [1]$ である。

$$3(x+1)^2 + 5(x+1) - 2 = 0$$

解答例

$$X = x + 1$$

とおくと、与式は、

$$3X^2 + 5X - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 = 6 \\ 3 \quad \times \quad -1 = -1 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$(X+2)(3X-1) = 0$$

$$X+2=0, 3X-1=0$$

X を戻すと、

$$x+1+2=0, 3(x+1)-1=0$$

$$x+3=0, 3x+3-1=0$$

$$x+3=0, 3x+2=0$$

$$x = -3, -\frac{2}{3} \cdots \text{A}$$

(2) a と b は実数である。 xy 座標平面において、放物線 $y = -2x^2$ を x 軸方向に a だけ平行移動し、 y 軸方向に b だけ平行移動すると、放物線 $y = -2x^2 + 4x - 4$ が得られるとき、 a と b の値は[2]である。

解答例

移動後の関数は、

$$y = -2(x - a)^2 + b = -2(x^2 - 2ax + a^2) + b = -2x^2 + 4ax - 2a^2 + b$$

上の関数と $y = -2x^2 + 4x - 4$ が等しいので、

$$-2x^2 + 4ax - 2a^2 + b = -2x^2 + 4x - 4$$

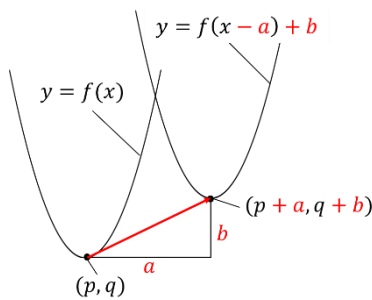
左辺の式と右辺の式が等しくなるためには、

$$\begin{cases} 4a = 4 \\ -2a^2 + b = -4 \end{cases}$$

上の連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \dots A$$

※上に開く放物線の平行移動を下の図に示す。



(3) $2x + y = 3$ のとき、 $2x^2 + y^2$ が最小値をとる時の x と y は [3] である。

解答例

1 次式について、

$$2x + y = 3$$

$$y = 3 - 2x$$

これを 2 次式に代入し、平方完成すると、

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 2x^2 + (3 - 2x)^2 = 2x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 6x^2 - 12x + 9 = 6(x^2 - 2x) + 9 \\ &= 6(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9 = 6(x - 1)^2 - 6 + 9 = 6(x - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって、最小値は3であり、そのとき $x = 1$

$x = 1$ を1次式に代入して、

$$y = 3 - 2x = 3 - 2 \times 1 = 1$$

よって、 $x = 1, y = 1 \cdots A$

(4) xy 座標平面において、2次関数のグラフが次の条件を満たすとき、その2次関数の式は[4]である。

条件：軸が $x = -2$ で、点 $(-5, 0)$ と点 $(0, 5)$ を通る。

解答例

軸が $x = -2$ なので、2次関数は、

$$y = a(x + 2)^2 + b$$

点 $(-5, 0)$ と点 $(0, 5)$ を通るので、

$$\begin{cases} a(-5 + 2)^2 + b = 0 \\ a(0 + 2)^2 + b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a + b = 0 \\ 4a + b = 5 \end{cases}$$

上の連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 9 \end{cases}$$

よって、2次関数は、

$$y = -(x + 2)^2 + 9 = -x^2 - 4x - 4 + 9 = -x^2 - 4x + 5 \cdots A$$

※類似の問題として、以下などがある。

放物線が通る3つの点の座標を与える問題

頂点の座標と放物線が通る1つの点の座標を与える問題（参考問題その1に出題）

頂点の x 座標または y 座標と放物線が通る2つの点の座標を与える問題（上に出題）

(5) xy 座標平面において、放物線 $y = -\sqrt{3}x^2$ が、 x 軸の正の向きとなす角が 60° の直線と1つの共有点（接点）を持つとき、共有点（接点）の座標は[5]である。

解答例

k を実数とする。 x 軸の正の向きとなす角が 60° の直線の関数は、

$$y = \sqrt{3}x + k$$

共有点（接点）では、 $y = -\sqrt{3}x^2$ と $y = \sqrt{3}x + k$ が成り立つので、

$$-\sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}x + k$$

$$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x + k = 0$$

共有点は1つなので、その判別式 D は、

$$D = (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}k = 3 - 4\sqrt{3}k = 0$$

$$k = \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって、2次方程式とその解は、

$$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x + 1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

これを 2 次関数の式に代入して、

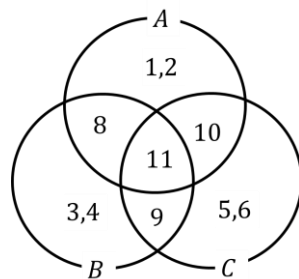
$$y = -\sqrt{3}x^2 = -\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって、

$$x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdots A$$

- 4 次の[1]～[4]にあてはまるものを、下記の【解答群】ア～オの中からそれぞれ1つ、または①～⑧の中から2つ選び、解答欄に記入しなさい。

- (1) 下のベン図で表される集合 A 、 B 、 C において、 $\overline{A \cup B \cup C} = \phi$ （空集合）であるとき、集合 $\{1,2,3,4\}$ を集合 A 、 B 、 C で表すと、[1]である。



解答例

$$\bar{C} = \{1,2,3,4,8\}$$

これから $\{8\}$ を除く必要がある。

$$A \cap B = \{8,11\}$$

を用いて、

$$\{1,2,3,4\} = \bar{C} \cap (\overline{A \cap B}) \cdots A$$

さらに、ド・モルガンの法則を使うと、

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

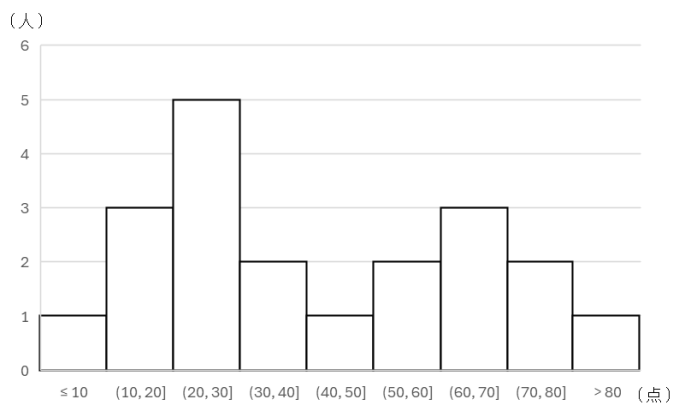
これと分配法則を使うと、

$$\{1,2,3,4\} = \bar{C} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (\bar{C} \cap \bar{A}) \cup (\bar{C} \cap \bar{B}) \cdots A$$

上の2つも解である。

- (2) 下の図は、20人の生徒のテストの点数のヒストグラムである。例えば、横軸の $(10,20]$ は「10より大きく20以下」を示す。また、 ≤ 10 は「10以下」を、 > 80 は「80より大きい」を示す。

第 2 四分位数が含まれる階級は[2]である。



解答例

生徒の数 20 人を 2 で割ると、

$$\frac{20}{2} = 10$$

なので、第 2 四分位数は 10 位と 11 位の得点の平均である。10 位と 11 位は、同じ階級(30,40]に含まれるので、

30 より大きく 40 以下の階級 … A

(3) 下の図は、100 人の生徒のテストの得点についての箱ひげ図である。 U の箱ひげ図は 100 人全員の母集団についてのもので、 A の箱ひげ図は、母集団 U の第 1 四分位数から第 3 四分位数までの範囲に入る部分集団についてのものである。100 人の生徒の中で、同じ得点の生徒はいない。母集団 U の全ての得点に対し、高い順に 1 位、2 位・・・100 位と順位を付ける。

この箱ひげ図から読み取れることとして正しいものは[3]と[4]である。

解答例

- ① それぞれの箱ひげ図において、第 3 四分位数と第 1 四分位数の差を四分位偏差という。

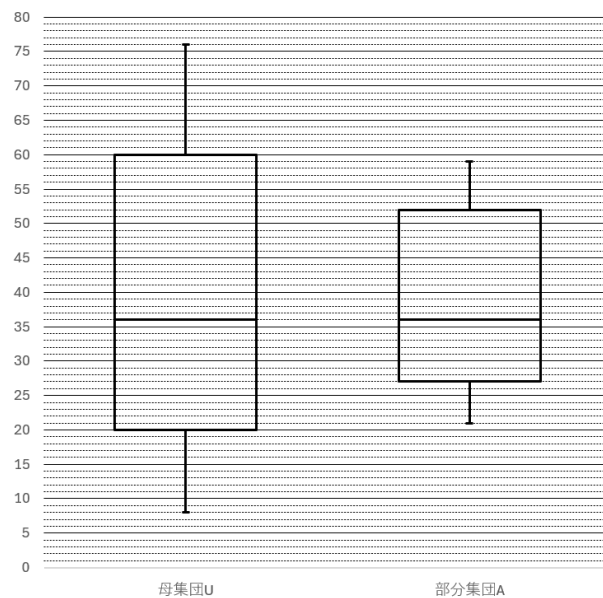
×

第3四分位数と第1四分位数の差を四分位範囲である。

② 母集団 U の四分位範囲と部分集団 A の範囲は等しい。

×

母集団 U の四分位範囲は25位と26位の得点の平均と、75位と76位の得点の平均の差であるが、一方、部分集団 A の範囲は26位の得点と75位の得点の差であり、両者は異なる。



③ 母集団 U の平均値と部分集団 A の平均値は等しい。

×

箱ひげ図からは、平均値を読み取れない。

母集団 U	
順位	
1	最大値
25	
平均	第3四分位数
26	
50	
平均	中央値（第2四分位数）
51	
75	
平均	第1四分位数
76	
100	最小値

部分集団 A	
順位	
26	最大値
38	第3四分位数
50	
平均	中央値（第2四分位数）
51	
63	第1四分位数
75	最小値

- ④ 二つの箱ひげ図から得点が特定できる生徒の数は6人である。

○

上の表より、母集団Uの箱ひげ図から得点が特定できる生徒は、

1 位＝最大値と、

100 位＝最小値であり、

部分集団Aの箱ひげ図から得点が特定できる生徒は、

26 位＝最大値

38 位＝第3四分位数

63 位＝第1四分位数

75 位＝最小値

であり、計6人である。

- ⑤ 二つの箱ひげ図から得点が特定できる生徒の数は7人である。

×

上の④参照。

- ⑥ 50 位の生徒の得点は36点である。

×

中央値の 36 点は、50 位と 51 位の平均である。

- ⑦ 母集団 U の中で、25 位の人の得点が 62 点とすると、26 位の人の得点は 58 点である。

○

第 3 四分位数の 60 点は 25 位と 26 位の平均であるので、以下の計算が成り立ち、正しい。

$$\frac{62 + 58}{2} = 60$$

- ⑧ 部分集団 A において、中央値以上で第 3 四分位数以下の得点の生徒の数は 12 人である。

×

中央値以上で第 3 四分位数以下の得点の生徒は、38 位（＝第 3 四分位数）から 50 位までなので、13 人である。

5

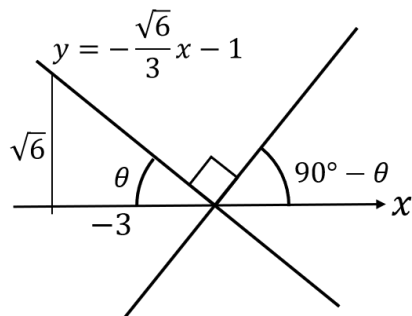
次の[1]～[4]にあてはまるものを、下記の【解答群】ア～オの中からそれぞれ1つ選び、解答欄に記入しなさい。

- (1) xy 座標上において、次の直線と垂直に交差し、原点(0,0)を通る直線の関数は[1]である。

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x - 1$$

解答例

直交する二つの直線は、下図のように描ける。



与式の直線と x 軸の負の方向がなす角を θ とおくと、 x の係数より、与式の直線の傾きは、

$$-\frac{\sqrt{6}}{3} = \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

与式と直交する直線の傾きは、

$$\tan(180^\circ - 90^\circ - \theta) = \tan(90^\circ - \theta) = \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

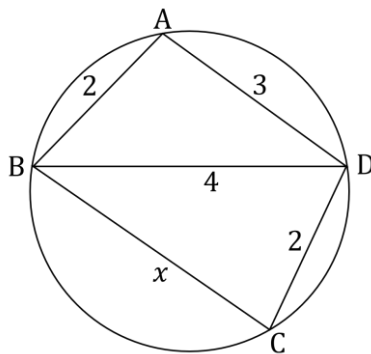
よって、原点(0,0)を通る直線の関数は、

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2}x \cdots A$$

(2) k は実数である。下の図の円に内接する四角形ABCDにおいて、辺の長さ $AB = 2$ 、 $AD = 3$ 、 $CD = 2$ 、 $BD = 4$ とすると、

$\cos \angle BCD = \cos(180^\circ - \angle BAD) = [2]$ であり、

$BC = x$ において、 $x^2 - x + k = 0$ が成り立つためには、 $k = [3]$ である。



解答例

$\triangle ABD$ に対する余弦定理より、

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (DA)^2 - 2(AB)(DA)\cos \angle BAD$$

$$\begin{aligned} \cos \angle BAD &= \frac{(AB)^2 + (DA)^2 - (BD)^2}{2(AB)(DA)} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{4 + 9 - 16}{2 \times 2 \times 3} \\ &= -\frac{3}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

円に内接する四角形の対角の和は 180° なので、

$$\cos \angle BCD = \cos(180^\circ - \angle BAD) = -\cos \angle BAD = \frac{1}{4} \cdots A$$

$\triangle BCD$ に対する余弦定理より、

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2(BC)(CD)\cos\angle BCD$$

$$4^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \frac{1}{4}$$

$$16 = 4 + x^2 - x$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

よって、 $k = -12 \dots A$

蛇足ですが、上の2次方程式を解くと、

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 = 3 \\ 1 \quad -4 = -4 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x + 3 = 0, x - 4 = 0$$

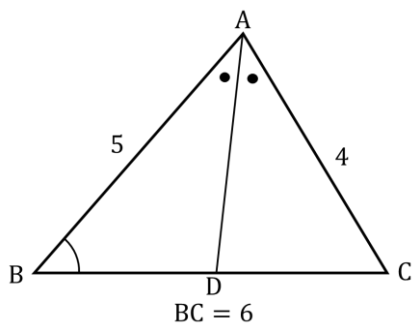
$$x = -3, 4$$

長さは正の値をとるので、

$$BC = 4$$

- (3) a と b は実数である。下の図の $\triangle ABC$ において、点Dは頂角 $\angle BAD$ の二等分線と辺BCの交点であり、 $AB = 5, BC = 6, CA = 4$ である。

$$(AD)^2 = a - b\cos\angle ABC \text{ が成り立つためには、} b = [4] \text{ であり、}$$



AD = [5]である。

解答例

ADは頂角の二等分線であるから、

$$BD = \frac{AB}{AB + CA} \times BC = \frac{5}{5 + 4} \times 6 = \frac{5 \times 6}{9} = \frac{10}{3}$$

△ABDに対する余弦定理より、

$$\begin{aligned} (AD)^2 &= (AB)^2 + (BD)^2 - 2(AB)(BD)\cos\angle ABC = 5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2 \times 5 \times \left(\frac{10}{3}\right)\cos\angle ABC \\ &= 25 + \frac{10^2}{3^2} - \frac{2 \times 5 \times 10}{3}\cos\angle ABC = 25 + \frac{10^2}{3^2} - \frac{100}{3}\cos\angle ABC \end{aligned}$$

よって、

$$b = \frac{100}{3} \cdots A$$

△ABCに対する余弦定理より、

$$(CA)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos\angle ABC$$

$$\cos\angle ABC = \frac{(AB)^2 + (BC)^2 - (CA)^2}{2(AB)(BC)} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{25 + 36 - 16}{2 \times 5 \times 6} = \frac{45}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$$

これを上の△ABDに対する余弦定理の式に代入すると、

$$(AD)^2 = 25 + \frac{10^2}{3^2} - \frac{100}{3} \times \frac{3}{4} = 25 + \frac{10^2}{3^2} - 25 = \frac{10^2}{3^2}$$

$$AD = \frac{10}{3} \cdots A$$

※△ABDにおいて、頂角∠BADの二等分線と辺BCの交点をDとすると、

BD : CD = AB : CA が成り立つ。

※解法のポイント：△ABCに対する余弦定理より $\cos\angle ABC$ を求め、△ABDに対する余弦定理よりADを求める。

6

次の[1]～[4]にあてはまるものを、下記の【解答群】ア～オの中からそれぞれ1つ選び、解答欄に記入しなさい。

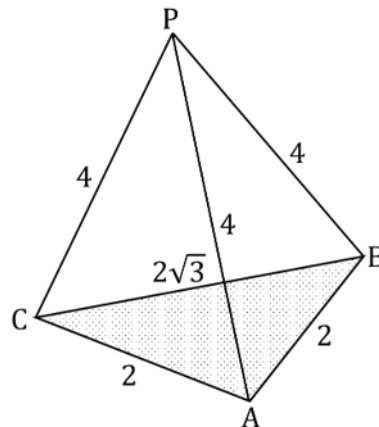
- (1) k は実数である。下の図のように、 $PA = PB = PC$ の三角錐において、点 P から平面 ABC に垂線 PH を下ろすと、 $HA = HB = HC$ である。 $PA = PB = PC = 4$ 、 $AB = CA = 2$ 、 $BC = 2\sqrt{3}$ とすると、

$\sin \angle ABC = [1]$ であり、

$\triangle ABC$ の外接円の半径 r は $r = HA = HB = HC = [2]$ であり、

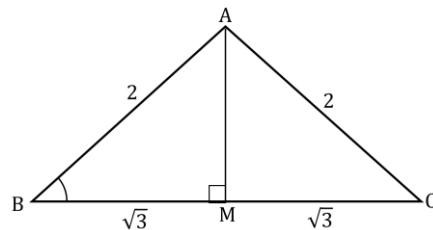
$\triangle PAH$ において、四面体 $PABC$ に外接する球の半径を R として、

$R^2 = (k - R)^2 + r^2$ が成り立つためには $k = [3]$ である。



解答例

二等辺三角形 ABC の辺 BC の中点を M とおくと、直角三角形 ABM に対する三平方の定理より、



$$(AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

$$AM = \sqrt{1} = 1$$

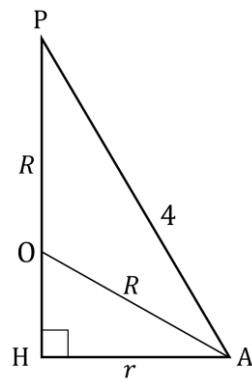
$$\sin \angle ABC = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \cdots A$$

$\triangle ABC$ に対する正弦定理より、

$$2r = \frac{CA}{\sin \angle ABC} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$r = \frac{4}{2} = 2 \cdots A$$

三角錐に内接する球の中心をOとおいて、 $\triangle PAH$ は下図のように描ける。



直角三角形 $\triangle PAH$ に対する三平方の定理より、

$$(HP)^2 = (AP)^2 - (AH)^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$HP = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$HO = HP - R$$

直角三角形OAHに対する三平方の定理より、

$$R^2 = (HO)^2 + r^2 = (HP - R)^2 + r^2 = (2\sqrt{3} - R)^2 + r^2$$

$$\text{よって、} k = 2\sqrt{3} \cdots A$$

蛇足ですが、さらに解析を進めると、上の三平方の定理の式より、

$$R^2 = (2\sqrt{3} - R)^2 + r^2 = R^2 - 4\sqrt{3}R + (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = R^2 - 4\sqrt{3}R + 12 + 4$$

$$= R^2 - 4\sqrt{3}R + 16$$

$$-4\sqrt{3}R + 16 = 0$$

$$R = \frac{16}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(了)