

沖縄ポリテクカレッジ

一般入試参考問題

解答解説

(数学 5 回分)

- 全て過去問ベースの参考問題
- 解答に至る手順を、図を多用し丁寧に解説
- まずは自分で解いてみよう。
- 解答時間の目安は、1 セット 90 分
- 5 回分から出題の傾向を把握
(例年、類似パターンの出題傾向)
- 本番の入試問題は全て 5 択の選択形式
(本冊子では選択肢を省略)

一般入試参考問題

第 1 / 5 回分

1 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを， 解答しなさい。

(1) $A = x^2 - 3x - 4$, $B = 2x - 1$, $C = -4x - 5$ のとき, $A - BC =$ 1 となる。

(2) $(a + 2b - 4c)^2$ を展開したときの bc の係数は 2 である。

(3) $4x^2 - 4x + 1 - y^2 =$ 3 である。〈 $(\dots)(\dots)$ の形に因数分解せよ。〉

(4) $2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3 =$ 4 である。〈 $(\dots)(\dots)$ の形に因数分解せよ。〉

(5) $|\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{10} - 4|$ を計算すると 5 となる。

解答 (1)

$$\begin{aligned} BC &= (2x - 1)(-4x - 5) \\ &= -8x^2 - 10x + 4x + 5 \\ &= -8x^2 - 6x + 5 \\ A - BC &= x^2 - 3x - 4 - (-8x^2 - 6x + 5) \\ &= x^2 - 3x - 4 + 8x^2 + 6x - 5 \\ &= 9x^2 + 3x - 9 \cdots A1 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 - y^2 &= (2x - 1)^2 - y^2 \\ &= \{(2x - 1) + y\}\{(2x - 1) - y\} \\ &= (2x - 1 + y)(2x - 1 - y) \cdots A3 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (a + 2b - 4c)^2 \\ bc \text{の項になるのは、} 2b \times (-4c) \text{が2つ} \\ \text{あるので} \\ 2 \times (2b) \cdot (-4c) = -16bc \\ -16 \cdots A2 \end{aligned}$$

(4)

$$g(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \nearrow \quad -3 = -3 \\ 1 \quad \searrow \quad 1 = 2 \\ \hline -1 \end{array}$$

より、

$$g(x, y) = (2x - 3y)(x + y) - 5x + 10y - 3$$

次に、

$$\begin{array}{r} 2x-3y \quad \nearrow \quad 1 = \quad x+y \\ x+y \quad \searrow \quad -3 = -6x+9y \\ \hline -5x+10y \end{array}$$

より、

$$g(x, y) = (2x - 3y + 1)(x + y - 3) \cdots A4$$

(5)

$$\sqrt{5} < 3 \text{ より}$$

$$|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$$

$$\sqrt{10} < 4 \text{ より}$$

$$|\sqrt{10} - 4| = 4 - \sqrt{10}$$

よって

$$|\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{10} - 4|$$

$$= 3 - \sqrt{5} + 4 - \sqrt{10}$$

$$= 7 - \sqrt{5} - \sqrt{10} \cdots A5$$

2 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

(1) 連立不等式 $\begin{cases} 4x + 7 \geq x + 10 \\ x^2 - 4x - 1 \leq 0 \end{cases}$ を解くと、 1 である。

(2) 循環小数の差 $1.\dot{1}\dot{5} - 0.\dot{5}\dot{1}$ を計算すると、 2 である。

(3) 方程式 $-x^2 + 2|x + 1| = 3$ の実数解は、 $x =$ 3 である。

(4) $a = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{13}}{\sqrt{15} - \sqrt{13}}$ のとき、 $a =$ 4 であり、 $a + \frac{1}{a} =$ 5 である。

解答 (1)

$$4x + 7 \geq x + 10$$

$$3x \geq 3$$

$$x \geq 1 \quad (1)$$

$$x^2 - 4x - 1 \leq 0$$

解の公式より

$$2 \pm \sqrt{4 + 1} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$2 - \sqrt{5} \leq x \leq 2 + \sqrt{5} \quad (2)$$

(1), (2) を満たすのは

$$1 \leq x \leq 2 + \sqrt{5} \cdots A1$$

$x < -1$ のとき

$$-x^2 - 2(x + 1) = 3$$

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$$

実数解無し。よって、(1) より

$$x = \pm 1 \cdots A3$$

(2)

$$1.1515151515$$

$$-0.5151515151$$

$$= 0.636363 \cdots = 0.\dot{6}\dot{3} \cdots A2$$

(3)

$$-x^2 + 2|x + 1| = 3$$

$x \geq -1$ のとき

$$-x^2 + 2(x + 1) = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

(4)

$$\begin{aligned}a &= \frac{\sqrt{15} + \sqrt{13}}{\sqrt{15} - \sqrt{13}} \\&= \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{13})^2}{(\sqrt{15} - \sqrt{13})(\sqrt{15} + \sqrt{13})} \\&= \frac{15 + 13 + 2\sqrt{15}\sqrt{13}}{15 - 13} \\&= \frac{28 + 2\sqrt{195}}{2} = 14 + \sqrt{195} \dots A4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{13}}{\sqrt{15} + \sqrt{13}} \\&= \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{13})^2}{(\sqrt{15} + \sqrt{13})(\sqrt{15} - \sqrt{13})} \\&= \frac{15 + 13 - 2\sqrt{15}\sqrt{13}}{15 - 13} \\&= \frac{28 - 2\sqrt{195}}{2} = 14 - \sqrt{195}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a + \frac{1}{a} &= 14 + \sqrt{195} + (14 - \sqrt{195}) \\&= 28 \dots A5\end{aligned}$$

3 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

- (1) $U = \{n \mid n \text{ は } 9 \text{ 以下の自然数}\}$ を全体集合とするとき、 U の部分集合 $A = \{1, 4, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 7, 8\}$ について、 $\bar{A} \cap \bar{B} =$ 1 である。
ただし、 $\bar{A}$, $\bar{B}$ はそれぞれ A , B の補集合を表す。

- (2) 右の表は、25人の5点満点の小テストの結果である。
中央値が2点、最頻値が3点であるとき、 $x =$ 2 ,
 $y =$ 3 である。
また、このとき、平均値は 4 , 分散は 5 である。

点数 (点)	人数 (人)
0	1
1	5
2	x
3	y
4	3
5	1
合計	25

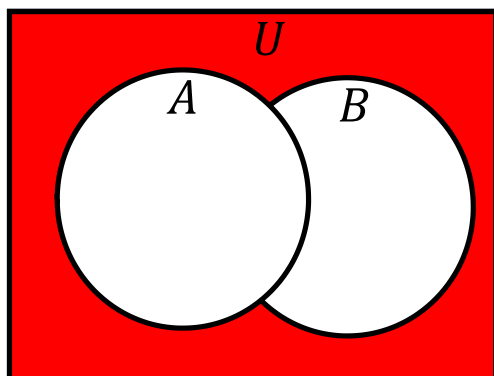
解答 (1)

ド・モルガンの法則より

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

$\overline{A \cup B}$ は U から A と B を除いた集合 (下図) なので

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{3, 6, 9\} \cdots A1$$



最頻値は3点なので

$$y > x \quad (3)$$

(1), (2), (3) を満たすのは

$$(x, y) = (7, 8) \cdots A2, A3$$

平均値は

$$\frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + \cdots + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{25} = \frac{60}{25}$$

$$= \frac{12}{5} = 2.4 \cdots A4$$

分散は

$$\sigma^2 = \text{得点}^2 \text{の平均} - \text{平均値}^2$$

$$0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 5 + \cdots + 4^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 1 = 178$$

$$\sigma^2 = \frac{178}{25} - 2.4^2 = 1.36 \cdots A5$$

(2)

総数 25 人なので

$$1 + 5 + 3 + 1 = 10$$

$$x + y + 10 = 25$$

$$x + y = 15 \quad (1)$$

中央値は2点なので

$$1 + 5 + x > y + 3 + 1$$

$$y - x < 2 \quad (2)$$

4 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

二次関数 C の式を $y=ax^2+(a-6)x+2$ (ただし $a \neq 0$) とする。

(1) C のグラフの軸の式を， a を用いて表すと， 1 となる。

(2) 二次関数 C の頂点が y 軸上にあるとき，頂点の y 座標の値は 2 である。

(3) a がどのような値であっても C のグラフが必ず通る点は， 3 ある。

(4) C のグラフが x 軸と共有点を 1 つだけ持つときの a の値は 4 である。

(5) C のグラフが， x 軸と $-3 < x < -2$ の範囲で 1 度交わるときの a の範囲は 5 である。

解答 (1)

平方完成すると

$$y = ax^2 + (a-6)x + 2$$

$$= a \left[x^2 + \left(1 - \frac{6}{a}\right)x \right] + 2$$

$$= a \left[x + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{a}\right) \right]^2 - a \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{a}\right)^2 + 2$$

$$= a \left[x + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{a}\right) \right]^2 - a \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{a} + \frac{9}{a^2}\right) + 2$$

$$= a \left[x + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{a}\right) \right]^2 - \frac{a}{4} + 3 - \frac{9}{a} + 2$$

$$= a \left[x + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{a}\right) \right]^2 - \frac{a}{4} + 5 - \frac{9}{a}$$

$$x = \frac{3}{a} - \frac{1}{2} \cdots A1$$

(2)

頂点が y 軸上にあるので

$$x = \frac{3}{a} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{2}$$

$$a = 6 \cdots A2$$

(3)

$$y = ax^2 + (a-6)x + 2$$

$$= a(x^2 + x) - 6x + 2$$

$x^2 + x = 0$ のとき、 a がどのような値で

も $a(x^2 + x) = 0$ なので

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1)$$

$$x = -1, 0$$

$$y = f(-1) = -6(-1) + 2 = 8$$

$$y = f(0) = 2$$

$$(-1, 8), (0, 2) \cdots A3$$

(4)

頂点の $y = 0$ より

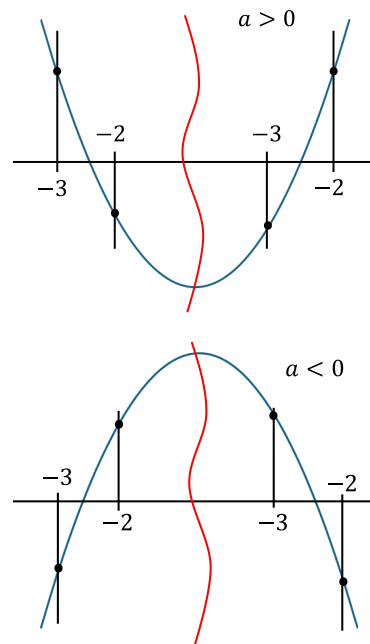
$$-\frac{a}{4} + 5 - \frac{9}{a} = 0$$

$$a^2 - 20a + 36 = 0$$

$$(a-2)(a-18) = 0$$

$$a = 2, 18 \cdots A4$$

(5)



上図より

$f(-3) > 0 \cap f(-2) < 0$ の場合

$$f(-3) = a(-3)^2 + (a-6)(-3) + 2 > 0$$

$$a > -\frac{10}{3} \quad (1)$$

$$f(-2) = a(-2)^2 + (a-6)(-2) + 2 < 0$$

$$a < -7 \quad (2)$$

(1), (2)を満たす解無し

$f(-3) < 0 \cap f(-2) > 0$ の場合

$$f(-3) = a(-3)^2 + (a-6)(-3) + 2 < 0$$

$$a < -\frac{10}{3} \quad (3)$$

$$f(-2) = a(-2)^2 + (a-6)(-2) + 2 > 0$$

$$a > -7 \quad (4)$$

(3), (4)より

$$-7 < a < -\frac{10}{3} \cdots A5$$

5 次の **1** ～ **5** にあてはまるものを、解答しなさい。

k を実数の定数として、2 次方程式

$$2x^2 + 4x - k - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

について考える。

(1) ①が異なる 2 つの実数解をもつような k の値の範囲は **1** である。

(2) ①の解の 1 つが $x = -3$ であるとき、他の解は $x = \text{2}$ である。

(3) ①が少なくとも 1 つの正の解をもつような k の値の範囲は **3** である。

(4) 2 次方程式 $4x^2 + 2x - 2k - 5 = 0$ と①が共通の解 $x = \alpha$ をもつとき、 $\alpha = \text{4}$ であり、このとき、 $k = \text{5}$ である。

解答 (1)

$$2x^2 + 4x - k - 1 = 0$$

異なる実数解を持つので、判別式

$$D > 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$4^2 + 4 \cdot 2 \cdot (k + 1) > 0$$

$$16 + 8k + 8 > 0$$

$$8k > -8 \cdot 3$$

$$k > -3 \cdots A1$$

(2)

$$f(x) = 2x^2 + 4x - k - 1$$

$x = -3$ が方程式の解であるので

$$f(-3) = 2(-3)^2 + 4(-3) - k - 1 = 0$$

$$18 - 12 - k - 1 = 0$$

$$k = 5 \cdots A2$$

$k = 5$ を①に代入

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = -3, 1$$

他の解は $x = 1 \cdots A2$

(3)

$$f(x) = 2x^2 + 4x - k - 1$$

平方完成（一部）すると

$$f(x) = 2x^2 + 4x - k - 1$$

$$= 2(x^2 + 2x) - k - 1$$

$$= 2(x+1)^2 - 2 - k - 1$$

$$= 2(x+1)^2 - k - 3$$

よって、軸は

$$x = -1$$

下図より、少なくとも一つの正の解を持つには $f(0) < 0$ 、頂点の $y < 0$ の2つを満たす必要あり。

$$-k - 3 < 0$$

$$k > -3 \quad (1)$$

$$f(0) = -k - 1 < 0$$

$$k > -1 \quad (2)$$

(1), (2) より

$$k > -1 \quad \cdots A3$$

(4)

$x = \alpha$ が両方の方程式の解であるので

$$2\alpha^2 + 4\alpha - k - 1 = 0 \quad (1)$$

$$4\alpha^2 + 2\alpha - 2k - 5 = 0 \quad (2)$$

$2 \times (1) - (2)$ は

$$8\alpha - 2 - (2\alpha - 5) = 0$$

$$6\alpha + 3 = 0$$

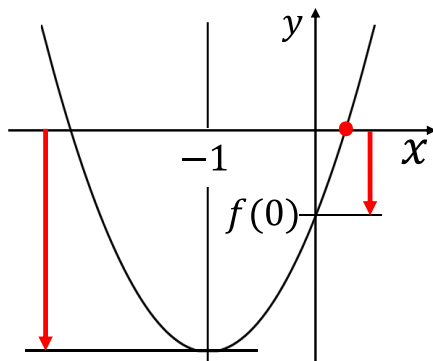
$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \cdots A4$$

$x = -\frac{1}{2}$ が①の解なので

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) - k - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} - 2 - k - 1 = 0$$

$$k = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \quad \cdots A5$$



6 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを， 解答しなさい。

(1) $\triangle ABC$ において， $BC=2\sqrt{3}$ ， $AB=6$ ， $\angle ABC=30^\circ$ とすると， $\triangle ABC$ の面積は 1 である。

(2) $\cos^2 150^\circ + \sin^2 150^\circ = 2$ である。

(3) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -\frac{1}{5}$ のとき， $\sin \theta = 3$ である。

(4) $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。 $\sin(90^\circ - \theta) + \sin(90^\circ + \theta) + 2 \cos(180^\circ - \theta) = 4$ である。

(5) $\sin 70^\circ + \cos 130^\circ + \sin 40^\circ + \cos 150^\circ + \cos 160^\circ = 5$ である。

解答 (1)

$$\sin \angle ABC = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

三角形の面積 $\triangle ABC$ は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} (\text{辺長}) (\text{辺長}) \sin (\text{間の角})$$

$$= \frac{1}{2} (AB)(BC) \sin \angle ABC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3} \dots A1$$

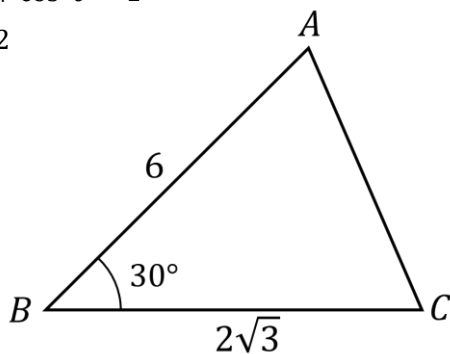
(2)

θ の値によらず三角関数の基本恒等式

は成り立つので

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

1 $\dots A2$

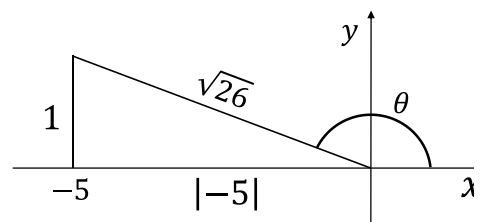


(3)

下図の $\tan \theta = -1/5$ の直角三角形において

$$\sqrt{(-5)^2 + (1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26} \dots A3$$



(4)

余角の公式及び補角の公式より

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \sin(180^\circ - 90^\circ - \theta)$$

$$= \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

以上を与式に代入すると

$$\sin(90^\circ - \theta) + \sin(90^\circ + \theta)$$

$$+ 2\cos(180^\circ - \theta)$$

$$= \cos\theta + \cos\theta - 2\cos\theta$$

$$= 0 \dots A4$$

(5)

余角の公式及び補角の公式より

$$\sin 70^\circ = \cos(90^\circ - 70^\circ) = \cos 20^\circ$$

$$\cos 130^\circ = -\cos(180^\circ - 130^\circ)$$

$$= -\cos 50^\circ = -\sin(90^\circ - 50^\circ)$$

$$= -\sin 40^\circ$$

$$\cos 150^\circ = -\cos(180^\circ - 150^\circ)$$

$$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 160^\circ = -\cos(180^\circ - 160^\circ)$$

$$= -\cos 20^\circ$$

以上を与式に代入すると

$$\sin 70^\circ + \cos 130^\circ + \sin 40^\circ + \cos 150^\circ$$

$$+ \cos 160^\circ$$

$$= \cos 20^\circ - \sin 40^\circ + \sin 40^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$- \cos 20^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \dots A5$$

7 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

(1) $\triangle ABC$ において、 $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 7$ とする。

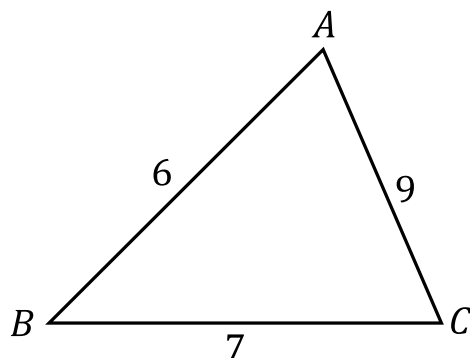
$\triangle ABC$ の面積は 1 である。

$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると、 $BD = 2$ である。

$\triangle ABC$ の内接円と辺 AB との接点を E とすると、 $AE = 3$ である。

(2) 四面体 $ABCD$ において、 $AB = 2$, $BC = 4$, $BD = 6$, $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 90^\circ$ とする。このとき、 $\triangle ACD$ の面積は 4 である。 また、点 B から $\triangle ACD$ に下ろした垂線と平面 ACD との交点を H とすると、線分 BH の長さは、 5 である。

解答 (1)



$$\text{面積}\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{110}}{21}$$

$$= 2\sqrt{110} \cdots A1$$

余弦定理より

$$\cos \angle B = \frac{(AB)^2 + (BC)^2 - (CA)^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

$$= \frac{6^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{36 + 49 - 81}{2 \cdot 6 \cdot 7}$$

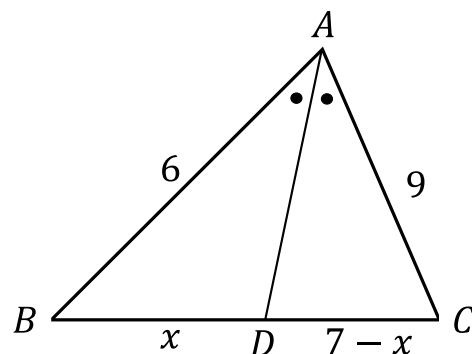
$$= \frac{4}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{21}$$

三角関数の基本恒等式より

$$\sin^2 \angle B = 1 - \cos^2 \angle B = 1 - \frac{1}{21^2}$$

$$= \frac{21^2 - 1}{21^2} = \frac{440}{21^2}$$

$$\sin \angle B = \frac{\sqrt{440}}{21} = \frac{2\sqrt{110}}{21}$$



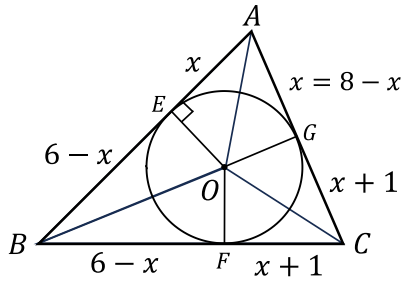
$x = BD$ とおくと、角の二等分線の公式より

$$x : 7 - x = AB : AC = 6 : 9 = 2 : 3$$

$$3x = 2(7 - x)$$

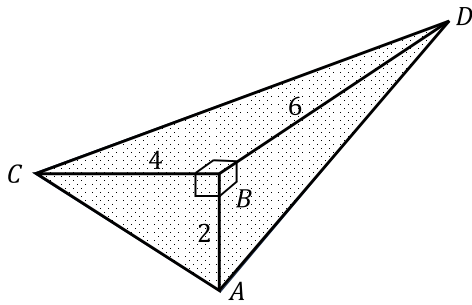
$$5x = 14$$

$$x = BD = \frac{14}{5} \cdots A2$$



$\triangle OAE \equiv \triangle OAG, \triangle OBE \equiv \triangle OBF,$
 $\triangle OCF \equiv \triangle OCG$ (上図) より
 $x = 9 - (x - 1) = 8 - x$
 $x = 4 \cdots A3$

(2)



直角三角形 $\triangle BCA, \triangle BDA, \triangle BCD$ より
 $(AC)^2 = 2^2 + 4^2 = 20$
 $(AD)^2 = 2^2 + 6^2 = 40$
 $(CD)^2 = 4^2 + 6^2 = 52$
 $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $AD = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 $CD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

三角形 $\triangle ACD$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}
 \cos \angle CAD &= \frac{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{13})^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} \\
 &= \frac{20 + 40 - 52}{8 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{8}{8 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}
 \end{aligned}$$

三角関数の基本恒等式より

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \angle CAD &= 1 - \cos^2 \angle CAD \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(5\sqrt{2})^2 - 1}{(5\sqrt{2})^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{50 - 1}{(5\sqrt{2})^2} = \frac{49}{(5\sqrt{2})^2}$$

$$\sin \angle CAD = \frac{\sqrt{49}}{5\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\Delta ACD = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$= 14 \cdots A4$$

三角錐の体積は $\triangle ABC$ と高さ BD でも、
 また $\triangle ACD$ と高さ BH でも求められるの
 で

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \right) BD = \frac{1}{3} \Delta ACD \cdot BH$$

$$BH = \frac{BA \cdot BC \cdot BD}{2 \Delta ACD} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 14}$$

$$= \frac{12}{7} \cdots A5$$

一般入試参考問題

第 2 / 5 回分

1 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを， 解答しなさい。

(1) $A=5x^2+2xy-2y^2$, $B=x^2-2xy-y^2$ のとき, $\frac{3A-2(A+B)}{3} = \boxed{1}$ である。

(2) $(x^2+2x+3)(x^2-5x+3)$ を展開したときの x^2 の係数は $\boxed{2}$ である。

(3) $2x^2-2y^2-x+5y-3$ を因数分解すると, $(2x+\boxed{3})(x+\boxed{4})$ となる。

(4) $a=2-\sqrt{5}$ のとき, $\sqrt{a^2} = \boxed{5}$ である。

解答 (1)

$$\begin{aligned}\frac{3A-2(A+B)}{3} &= \frac{A-2B}{3} \\ &= \frac{5x^2+2xy-2y^2-2(x^2-2xy-y^2)}{3} \\ &= \frac{3x^2+6xy}{3} = x^2+2xy \cdots A1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}3 \cdot x^2 + 2x \cdot (-5x) + 3 \cdot x^2 &= -4x^2 \\ -4 \cdots A2\end{aligned}$$

(3)

$2x^2-2y^2$ に着目すると

$$2x^2-2y^2-x+5y-3$$

$$= 2(x-y)(x+y) - x + 5y - 3$$

$$\begin{array}{rcl} 2(x-y) & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \\ x+y & & \end{array} \begin{array}{l} = 3x+3y \\ = -2x+5y \end{array}$$

$$-x+5y$$

$$2x^2-2y^2-x+5y-3$$

$$= (2x-2y+3)(x+y-1) \cdots A3, A4$$

(4)

$$a = 2 - \sqrt{5}$$

解答しなさい。

$$= 9 - 2\sqrt{20}$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{p} - \sqrt{q} \quad (\sqrt{a^2} > 0 \text{ より } p > q)$$

$$p+q=9$$

$$pq=20$$

$$(p, q) = (5, 4)$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{5} - \sqrt{4} = \sqrt{5} - 2 \cdots A5$$

2 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

(1) $\sqrt{6}$ の整数部分を a 、小数部分を b とすると、 $\frac{a}{b} = \boxed{1}$ である。

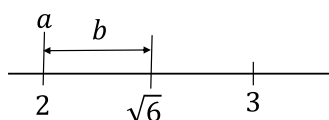
(2) 連立不等式 $\begin{cases} |x-2| < 7 \\ 3-2x > 5 \end{cases}$ を解くと、 $\boxed{2}$ となる。

(3) 方程式 $|x^2-4|=3x$ の解は、 $\boxed{3}$ である。

(4) 方程式 $x^2+x-1=0$ の解は、 $\boxed{4}$ である。

この方程式の解のうち一方を $x=a$ とすると、等式 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ を利用して a^3 の値は a の一次式で $\boxed{5}$ と表せる。

解答 (1)



$$2^2 < 6 < 3^2 \text{ より}$$

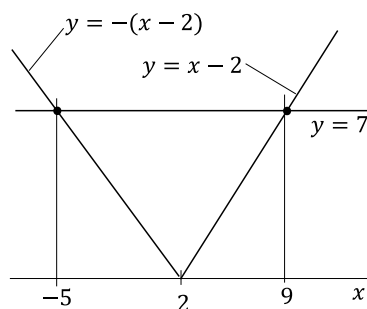
$$a = 2$$

$$b = \sqrt{6} - 2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4} = \sqrt{6}+2 \dots A1$$

(2)



上図より $|x-2| = 7$ を満たす 2 つの交点は

$$x-2=7$$

$$x=9$$

$$-(x-2)=7$$

$$x=-5$$

よって

$$-5 < x < 9 \quad (1)$$

$$3 - 2x > 5$$

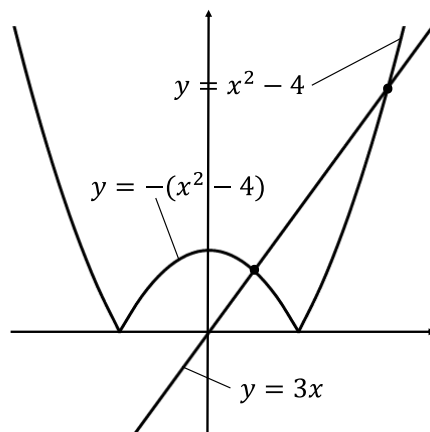
$$2x < -2$$

$$x < -1 \quad (2)$$

(1), (2)より

$$-5 < x < -1 \cdots A2$$

(3)



上図より、 $x > 0$ で2つの交点が存在する。

$$-(x^2 - 4) = 3x$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = -4, 1$$

$x > 0$ より

$$x = 1 \quad (1)$$

$$x^2 - 4 = 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = -1, 4$$

$x > 0$ より

$$x = 4 \quad (2)$$

(1), (2)より

$$x = 1, 4 \cdots A3$$

(4)

$$x^2 + x - 1 = 0$$

解の公式より

$$x = \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdots A4$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$$

$$\alpha^3 = (\alpha - 1)[(\alpha^2 + \alpha - 1) + 2] + 1$$

$$= (\alpha - 1)(2) + 1 = 2\alpha - 2 + 1$$

$$= 2\alpha - 1 \cdots A5$$

3 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

(1) 集合 $U = \{ n \mid n \text{ は } 20 \text{ 以下の自然数} \}$ を全体集合とすると、 U の部分集合

$$A = \{ n \mid n \text{ は偶数} \}, B = \{ n \mid n \text{ は } 3 \text{ の倍数または } 4 \text{ の倍数} \}$$

について、 $A \cap B =$ 1 である。ただし、 $\bar{B}$ は B の補集合を表す。

(2) a, b は実数とする。2つの条件

$$p: a > -1 \text{ かつ } b > -1 \quad q: a + b > -2$$

について、 p は q であるための 2 。

(3) 校庭の桜の木のうち樹齢の明らかな4本について、地上100 cmでの幹まわりの長さを測った。下の表は樹齢を x 年、その平均値を $\bar{x}$ 年、また、幹まわりの長さを y cm、その平均値を $\bar{y}$ cm として、 $(x - \bar{x})^2$, $(y - \bar{y})^2$, $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ を計算したものである。樹齢の標準偏差は 3 年であり、表中の A の値は 4 である。また、 x と y の相関係数を、小数第3位を四捨五入して小数第2位まで求めると 5 である。ただし、計算式の分母を有理化してから、 $\sqrt{33} = 5.7$ として計算すること。

樹木番号	樹齢 x 年	幹まわり y cm	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
①	30	38	25	64	40
②	35	39	100	81	90
③	20	26	25	16	20
④	15	A	100	169	130
計	100	B	250	330	280

解答 (1)

$$A \cap \bar{B} = \left\{ n \mid \begin{array}{l} n \text{ は } 3 \text{ の倍数でもなく、} \\ 4 \text{ の倍数でもない偶数} \end{array} \right\}$$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ から3の倍数と4の倍数を削除すると

$$A \cap \bar{B} = \{2, 10, 14\} \cdots A1$$

別解

$$B = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20\}$$

$$\bar{B} = \{1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$A \cap \bar{B} = \{2, 10, 14\} \cdots A1$$

(2)

$$a > -1 \quad (1)$$

$$b > -1 \quad (2)$$

(1) + (2)より

$$a + b > -2$$

となり、 p から q が導けるので $p \Rightarrow q$ 。

一方、

$$a = -2, b = 1$$

は q を満たすが、 p は満たさないので $q \nRightarrow p$ 。

よって、 p は q であるための

十分条件であるが、必要条件ではない。

… A2

(3)

s : 標準偏差

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{250}{4}} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \dots A3$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{100}{4} = 25$$

表中の③のデータより

$$(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 20$$

$$(20 - 25)(26 - \bar{y}) = 20$$

$$26 - \bar{y} = \frac{20}{-5} = -4$$

$$\bar{y} = 26 + 4 = 30$$

表中の④のデータより

$$(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 130$$

$$(15 - 25)(y - 30) = 130$$

$$y - 30 = \frac{130}{-10} = -13$$

$$y = 30 - 13 = 17 \dots A4$$

r : 相関係数

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot \sum (y - \bar{y})^2}}$$
$$= \frac{280}{\sqrt{250 \cdot 330}} = \frac{280}{5 \cdot 10\sqrt{33}}$$

$$= \frac{28}{5\sqrt{33}} = \frac{28\sqrt{33}}{5 \cdot 33}$$

$$= \frac{28 \cdot 5.7}{5 \cdot 33} = 0.97 \dots A5$$

4 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを， 解答しなさい。

(1) 放物線 $y = x^2 - 6x$ を C とする。

① C を x 軸に関して対称移動すると，関数 $y =$ 1 のグラフと重なる。

② C を y 軸に関して対称移動すると，関数 $y =$ 2 のグラフと重なる。

③ C を原点に関して対称移動すると，関数 $y =$ 3 のグラフと重なる。

(2) $y = x^2 - 5x + 2$ ($0 \leq x \leq 3$) の最小値は 4 で，最大値は 5 である。

解答(1)①

$$y = f(x) = x^2 - 6x$$

$$y \rightarrow -y$$

と置き換えると

$$-y = f(x) = x^2 - 6x$$

$$y = -x^2 + 6x \cdots A1$$

②

$$x \rightarrow -x$$

と置き換えると

$$y = f(-x) = (-x)^2 - 6(-x)$$

$$y = x^2 + 6x \cdots A2$$

③

$$x \rightarrow -x$$

$$y \rightarrow -y$$

と置き換えると

$$-y = f(-x) = (-x)^2 - 6(-x)$$

$$-y = x^2 + 6x$$

$$y = -x^2 - 6x \cdots A3$$

(2)

$$y = g(x) = x^2 - 5x + 2$$

平方完成すると

$$y = \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + 2$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

頂点 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$ と $0 \leq x \leq 3$ の関係は下図の

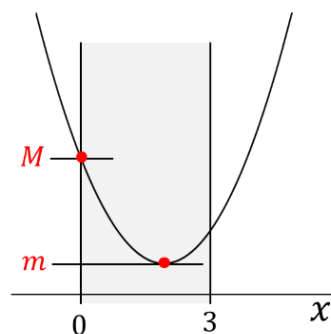
ようになるので，最小値 m は

$$m = -\frac{17}{4} \cdots A4$$

最大値 M は

$$M = g(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 2$$

$$= 2 \cdots A5$$



5 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

$f(x) = x^2 - 2(2a + 1)x + 5a^2 + 6a - 7$ とする。ただし、 a は実数の定数である。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標は 1 である。 a の値を変化させたとき、頂点の y 座標の最小値は 2 となる。

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき、 a の値の範囲は 3 となる。

(3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点が直線 $y = -2x + 1$ 上にあり、かつ $a > 0$ であるとき、 a の値は 4 である。

このとき、放物線 $y = f(x)$ が x 軸から切り取る線分の長さは 5 となる。

解答(1)

平方完成すると

$$f(x) = x^2 - 2(2a + 1)x + 5a^2 + 6a - 7$$

$$= [x - (2a + 1)]^2 - (2a + 1)^2$$

$$+ 5a^2 + 6a - 7$$

$$= [x - (2a + 1)]^2$$

$$- (4a^2 + 4a + 1) + 5a^2 + 6a - 7$$

$$= [x - (2a + 1)]^2 + a^2 + 2a - 8$$

$$\text{頂点の } y(a) = a^2 + 2a - 8 \cdots A1$$

頂点の $y(a)$ を平方完成すると

$$y = a^2 + 2a - 8 = (a + 1)^2 - 1 - 8$$

$$= (a + 1)^2 - 9$$

よって、最小値は $-9 \cdots A2$

頂点の $y < 0$

$$a^2 + 2a - 8 < 0$$

$$(a + 4)(a - 2) < 0$$

$$-4 < a < 2 \quad (2)$$

$$f(0) > 0$$

$$5a^2 + 6a - 7 > 0$$

解の公式より

$$a < \frac{-3 - 2\sqrt{11}}{5}, \frac{-3 + 2\sqrt{11}}{5} < a \quad (3)$$

(1), (2), (3) を満たすのは

$$\frac{-3 + 2\sqrt{11}}{5} < a < 2 \cdots A3$$

(2)

図より、2 つの正の解を持つには、軸

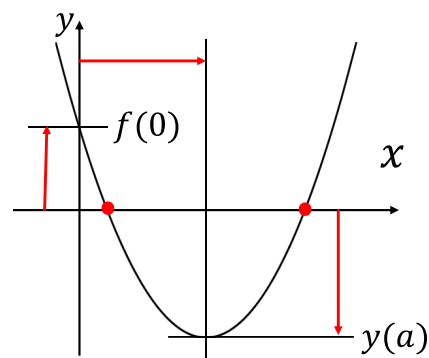
の $x > 0$ 、かつ頂点の $y < 0$ 、かつ

$f(0) > 0$ の 3 条件を満たす必要あり。

軸の $x > 0$

$$2a + 1 > 0$$

$$a > -\frac{1}{2} \quad (1)$$



(3)

$$y = -2x + 1$$

$$x = 2a + 1$$

$$y = a^2 + 2a - 8$$

上の3式より

$$a^2 + 2a - 8 = -2(2a + 1) + 1$$

$$a^2 + 6a - 7 = 0$$

$$(a + 7)(a - 1) = 0$$

$$a = -7, 1$$

$a > 0$ より

$$a = 1 \cdots A4$$

$$y = x^2 - 2(2a + 1)x + 5a^2 + 6a - 7$$

$$a = 1$$

$$y = x^2 - 2(2 + 1)x + 5 + 6 - 7 = 0$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

解の公式より

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{線分の長さは } 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cdots A5$$

6 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

(1) $\cos 15^\circ \sin 105^\circ - \cos 105^\circ \sin 15^\circ =$ 1 である。

(2) $\tan \theta = -2$ のとき， $\cos \theta =$ 2， $\sin \theta + \cos \theta =$ 3 である。
ただし， $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(3) $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき， $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ の解は， $x =$ 4 である。

(4) 直線 $y = \sqrt{3}x$ と直線 $y = -x$ がなす鋭角を θ とすると， $\theta =$ 5 である。

解答(1)

補角の定理と余角の定理より

$$\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 105^\circ) = \sin 75^\circ$$

$$= \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\cos 105^\circ = -\cos(180^\circ - 105^\circ)$$

$$= -\cos 75^\circ = -\sin(90^\circ - 75^\circ)$$

$$= -\sin 15^\circ$$

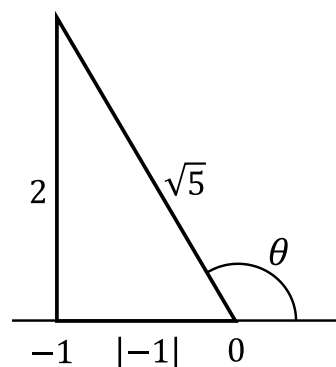
以上を与式に代入すると

$$\cos 15^\circ \sin 105^\circ - \cos 105^\circ \sin 15^\circ$$

$$= \cos 15^\circ \cos 15^\circ + \sin 15^\circ \sin 15^\circ$$

$$= \cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ = 1 \quad \cdots A1$$

(2)



上図の $\tan \theta = -2$ の直角三角形において、

$$\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cdots A2$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cdots A3$$

(3)

三角関数の基本恒等式より

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

与式に代入すると

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

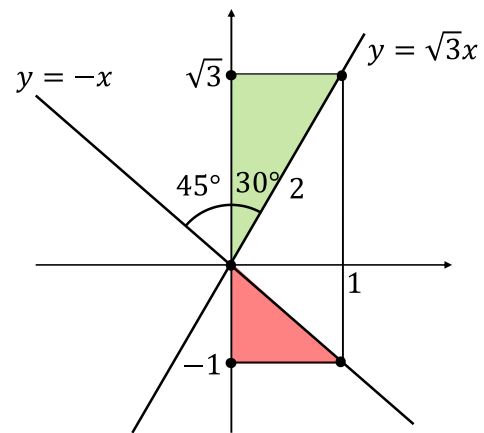
$$\sin x = -1, \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ より

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = 30^\circ, 150^\circ \cdots A4$$

(4)



上図の $(0,0)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$ を頂点とする二等辺直角三角形より、 $y = -x$ と y 軸がなす角度は 45°

$(0,0)$, $(0,\sqrt{3})$, $(1,\sqrt{3})$ を頂点とする直角三角形より、 $y = \sqrt{3}x$ と y 軸がなす角度は 30°

よって

$$45^\circ + 30^\circ = 75^\circ \cdots A5$$

7 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

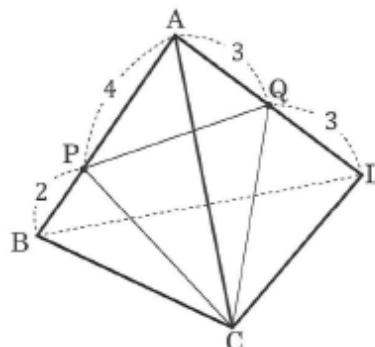
1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD において、 辺 AB, AD 上にそれぞれ右の図のような点 P, Q をとる。

(1) $\triangle APQ$ の面積は 1 である。

(2) $CP = 2$, $PQ = 3$ である。

(3) $\cos \angle PCQ = 4$ である。

(4) 正四面体 ABCD に内接する球の半径は 5 である。



解答 (1)

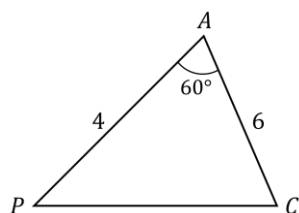
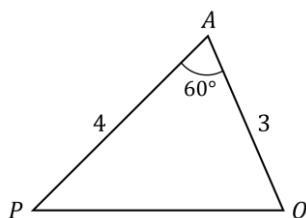
$$\sin \angle PAQ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

三角形の面積 $\triangle APQ$ は

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} (\text{辺長}) (\text{辺長}) \sin (\text{間の角})$$

$$= \frac{1}{2} (AP)(AQ) \sin \angle PAQ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \cdots A1$$



(2)

$$\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

余弦定理 (下図) より

$$\begin{aligned} (CP)^2 &= (AC)^2 + (AP)^2 \\ &\quad - 2(AC)(AP)\cos \angle CAP \end{aligned}$$

$$= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 36 + 16 - 24 = 28$$

$$CP = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \cdots A2$$

$$\cos \angle PAQ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

余弦定理より

$$\begin{aligned} (PQ)^2 &= (AP)^2 + (AQ)^2 \\ &\quad - 2(AP)(AQ)\cos \angle PAQ \end{aligned}$$

$$= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 16 + 9 - 12 = 13$$

$$PQ = \sqrt{13} \cdots A3$$

(3)

$\triangle CAQ$ は $\angle CAQ = 60^\circ, \angle AQC = 90^\circ$ の直角三角形（下図）なので、

$$CQ = AC \sin \angle CAQ = AC \sin 60^\circ$$

$$= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

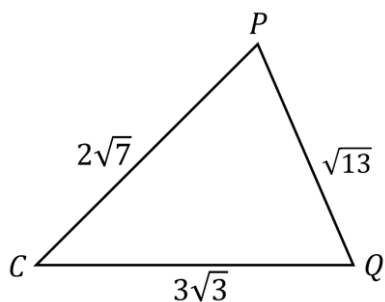
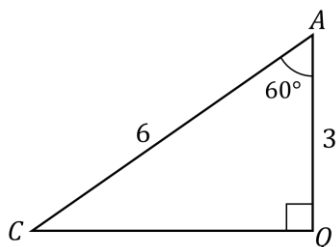
余弦定理（下図）より

$$\cos \angle PCQ = \frac{(CP)^2 + (CQ)^2 - (PQ)^2}{2(CP)(CQ)}$$

$$= \frac{(2\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{28 + 27 - 13}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{42}{2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{21}} = \frac{7}{2\sqrt{21}}$$

$$= \frac{7\sqrt{21}}{2 \cdot 21} = \frac{\sqrt{21}}{6} \dots A4$$



(4) (かなり難しい問題)

下図のように点Hを取り、 $QH = x$ とおくと

$$(QH)^2$$

$$= (3\sqrt{3})^2 - x^2 = 6^2 - (3\sqrt{3} - x)^2$$

$$6\sqrt{3}x = 18$$

$$x = QH = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

三平方の定理より

$$(BH)^2 = (BQ)^2 - (QH)^2$$

$$= (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 27 - 3 = 24$$

$$BH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

BHは、 $\triangle ACD$ を底面とする三角錐

ABCDの高さである。

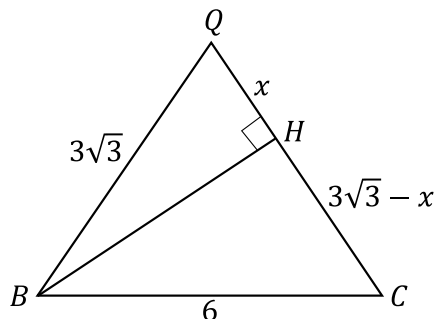
内接する球の中心を点Oとおくと三角錐ABCDは、4つの三角錐

$OABC, OBCD, OCDA, ODAB$ に分割できる。

三角錐の体積は以下の右辺と左辺の二通りで表される。(r: 球の半径)

$$\frac{1}{3}(BH)\triangle ACD = 4 \times \frac{1}{3}r\triangle ACD$$

$$r = \frac{BH}{4} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \dots A5$$



一般入試参考問題

第 3 / 5 回分

1 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

(1) $A = 3x - 2y$, $B = -x + y$, $C = x^2 - 2$ のとき, $AC + 2BC$ を計算すると, 1 である。

(2) $(5a - 7b)(2a + b - 1)$ を展開したときの ab の係数は 2 である。

(3) $x^3 - 3x^2y - 4xz^2 + 12yz^2$ を因数分解すると, $(x - 3y)4$ となる。

(4) 2 つの数の和が $5\sqrt{2}$, 差が $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$ であるとき, これら 2 つの数のうち大きいほうの数は 5 である。

解答 (1)

$$\begin{aligned} AC + 2BC &= (A + 2B)C \\ &= [3x - 2y + 2(-x + y)]C \\ &= (3x - 2y - 2x + 2y)C \\ &= x(x^2 - 2) \\ &= x^3 - 2x \cdots A1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &(5a - 7b)(2a + b - 1) \\ &ab \text{ の項になるのは, } 5a \times b \text{ の積及び} \\ &-7b \times 2a \text{ であるので} \\ &5a \cdot b + (-7b) \cdot (2a) = 5ab - 14ab \\ &= -9ab \\ &-9 \cdots A2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &x^3 - 3x^2y - 4xz^2 + 12yz^2 \\ &= x^2(x - 3y) - 4z^2(x - 3y) \\ &= (x - 3y)(x^2 - 4z^2) \\ &= (x - 3y)(x + 2z)(x - 2z) \\ &3 \cdots A3 \\ &(x + 2z)(x - 2z) \cdots A4 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} &\text{変数 } x > y \text{ とおくと} \\ &x + y = 5\sqrt{2} \quad (1) \\ &x - y = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \quad (2) \\ &(1) + (2) \text{ は} \\ &2x = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \\ &x = 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdots A5 \end{aligned}$$

2 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

(1) 不等式 $\frac{3x-4}{4} < \frac{4x+3}{6}$ を満たす正の整数 x の個数は 1 個である。

解答しなさい。

(2) 循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ を既約分数で表すと、 2 である。

(3) 方程式 $|3x-1|=x$ の実数解は、 $x=3$ である。

(4) $a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, $b = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ のとき、 $ab=4$ であり、 $a+b=5$ である。

解答 (1)

$$\frac{3x-4}{4} < \frac{4x+3}{6} \quad (1)$$

(1) $\times 12$ は

$$3(3x-4) < 2(4x+3)$$

$$9x-12 < 8x+6$$

$$x < 18$$

$$x = 1, 2 \cdots 16, 17$$

$$17 \cdots A1$$

(2)

$$0.\dot{1}2\dot{3} \times 1000 - 0.\dot{1}2\dot{3}$$

$$= 123.\dot{1}2\dot{3} - 0.\dot{1}2\dot{3} = 123 \quad (1)$$

一方

$$0.\dot{1}2\dot{3} \times 1000 - 0.\dot{1}2\dot{3}$$

$$= 0.\dot{1}2\dot{3}(1000-1)$$

$$= 0.\dot{1}2\dot{3} \times 999 \quad (2)$$

(2) = (1) より

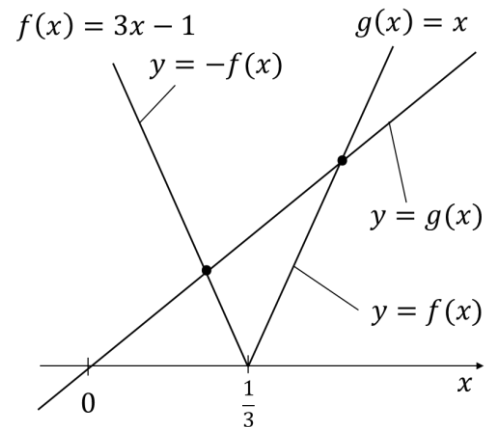
$$0.\dot{1}2\dot{3} \times 999 = 123$$

$$0.\dot{1}2\dot{3} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333} \cdots A2$$

(3)

$$y = |3x-1| \text{ と } y = x$$

のグラフは



左の交点では

$$y = -(3x-1) = x$$

$$-3x+1 = x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

右の交点は

$$y = 3x - 1 = x$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

よって、 $|3x - 1| = x$ の解は

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \cdots A3$$

(4)

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{(4\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{16 \cdot 3}{5 - 2} = \frac{16 \cdot 3}{3} = 16 \cdots A4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + 4\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5}}{3} = \frac{8\sqrt{15}}{3} \cdots A5 \end{aligned}$$

3 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

星

(1) $U = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ 以下の正の整数}\}$ を全体集合として、その部分集合

$A = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ 以下の正の整数で } 5 \text{ の倍数}\}$

$B = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ 以下の正の整数で } 3 \text{ の倍数}\}$

について、

$$A \cup B = \boxed{1},$$

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = \boxed{2}$$

である。ただし、 $\overline{A \cap B}$ は、 U に関する $A \cap B$ の補集合を表し、 $\emptyset$ は空集合を表す。

(2) 下の表は、20 人の生徒に 8 点満点の小テストを行った結果である。

得点 (点)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
人数 (人)	1	2	4	3	4	x	3	1	y

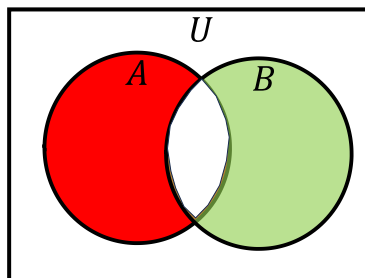
平均値は 3.5 点であった。このとき、 $y = \boxed{3}$ である。

また、四分位偏差は $\boxed{4}$ であり、分散は $\boxed{5}$ である。

解答 (1)

$(A \cup B)$ は 3 の倍数と 5 の倍数なので、

$$A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\} \cdots A1$$



$$A \cap B = \{15 \text{ の倍数}\}$$

$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$ は上の図の色の領域。

3 の倍数と 5 の倍数から 15 の倍数を除くと

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$

$$= \{3, 5, 6, 9, 10, 12\} \cdots A2$$

(2)

総人数 20 名より

$$1 + 2 + 4 + 3 + 4 + 3 + 1 = 18$$

$$x + y + 18 = 20$$

$$x + y = 2 \quad (1)$$

平均値 3.5 より

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3$$

$$+ 7 \cdot 1 = 60$$

$$\frac{5x + 8y + 60}{20} = 3.5$$

$$5x + 8y = 10 \quad (2)$$

(1), (2) より

$$(x, y) = (2, 0) \cdots A3$$

下から 5 番目の人の得点は

$$Q1 = 2$$

上から 5 番目の人の得点は

$$Q3 = 5$$

$$\frac{Q3 - Q1}{2} = \frac{5 - 2}{2} = 1.5 \dots A4$$

分散 $s^2 = \text{得点}^2 \text{の平均} - \text{平均値}^2$

$$1 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + \dots + 3 \cdot 6^2 + 1 \cdot 7^2 = 316$$

$$s^2 = \frac{316}{20} - 3.5^2 = 3.55 \dots A5$$

4 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

関数 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ とする。また、 $y = f(x)$ のグラフを C とする。

(1) C を x 軸方向へ 2、 y 軸方向に -4 平行移動すると、関数 $y =$ 1 のグラフと重なる。
また、放物線 $y = x^2 - 8x + 12$ は、 C を原点について対称に移動し、 x 軸方向へ 2 平行移動したものである。

(2) 関数 $y = f(x) (-2 \leq x \leq 2)$ の値域は、 3 である。

(3) C の頂点を P 、 C が x 軸と交わる点を Q 、 R 、 C が y 軸と交わる点を A とする。線分 PQ 、 QR をとより合う 2 辺とする平行四辺形 $PQRS$ をつくと、平行四辺形 $PQRS$ の面積は 4 である。また、点 A を通り、平行四辺形 $PQRS$ の面積を 2 等分する直線の式は、 5 である。ただし、 $(Q \text{ の } x \text{ 座標}) < (R \text{ の } x \text{ 座標})$ とする。

解答 (1)

$$x \rightarrow x - 2, y \rightarrow y + 4$$

$$y + 4 = f(x - 2)$$

$$y = -(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 3 - 4$$

$$= -(x^2 - 4x + 4) + 2x - 4 - 1$$

$$= -x^2 + 6x - 9 \cdots A1$$

原点に関して対象移動すると

$$x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$$

$$-y = f(-x)$$

$$-y = -x^2 + 2(-x) + 3$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

さらに x 方向に a だけ平行移動すると

$$x \rightarrow x - a$$

$$y = (x - a)^2 + 2(x - a) - 3$$

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 2x - 2a - 3$$

$$y = x^2 - (2a - 2)x + a^2 - 2a - 3$$

$$y = x^2 - 8x + 12 \text{ と比較して}$$

$$2a - 2 = 8$$

$$a = 5 \cdots A2$$

なお、 $a = 5$ で $a^2 - 2a - 3 = 12$ が成り立つ。

(2)

平方完成すると

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 3$$

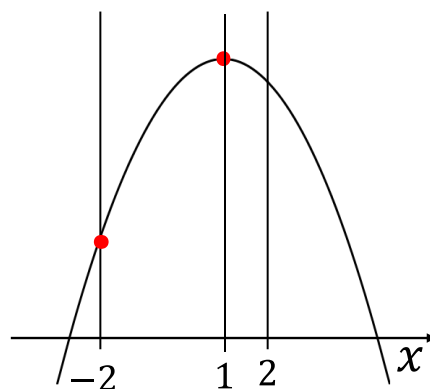
$$= -(x - 1)^2 + 1 + 3 = -(x - 1)^2 + 4$$

下図より、最大値は頂点の $y = 4$

$x = -2$ で最小値を取るの

$$y = f(-2) = -(-2 - 1)^2 + 4 = -5$$

$$-5 \leq y \leq 4 \cdots A3$$



(3)

頂点は $P(1,4)$

y 軸と交わる点 A は

$$y = f(0) = 3$$

$A(0,3)$

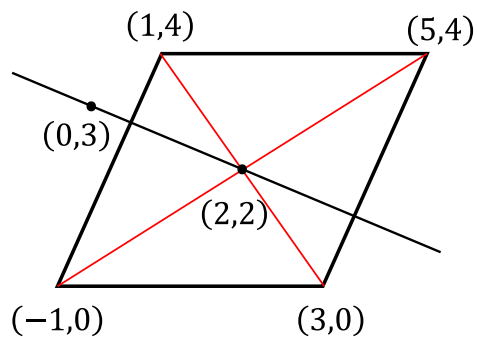
x 軸と交わる点 Q, R は

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1, 3$$

$Q(-1,0), R(3,0)$



上図より底辺の長さ 4、高さ 4 なので

$$\text{面積} = 4 \times 4 = 16 \cdots A4$$

平方四辺形を中心 $(2,2)$ を通る直線が二等分するので、中心 $(2,2)$ と点 $A(0,3)$ を通る直線は

$$\text{傾き} = \frac{2-3}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

切片 = 3

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \cdots A5$$

5 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

(1) $\cos 30^\circ \cos 150^\circ + \sin 60^\circ \sin 120^\circ$ の値を求めると， 1 である。

(2) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ で $\tan \theta = 2$ のとき， $\cos \theta =$ 2 ， $\sin \theta =$ 3 である。

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき， $6\sin^2 \theta + \sin \theta - 2 = 0$ を満たす θ の値は， $\theta =$ 4 ， 5 である。
ただし， 4 < 5 とする。

解答 (1)

補角の定理と余角の定理より

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ$$

$$\cos 150^\circ = -\cos(180^\circ - 150^\circ)$$

$$= -\cos 30^\circ$$

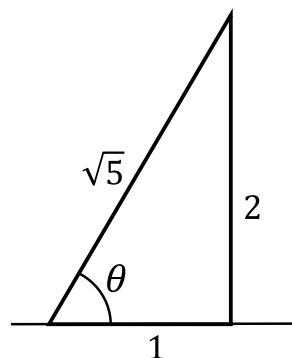
これらを与式に代入すると

$$\cos 30^\circ \cos 150^\circ + \sin 60^\circ \sin 120^\circ$$

$$= -\cos 30^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 60^\circ$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \cdots A1$$

(2)



上図の $\tan \theta = 2$ の直角三角形において、

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdots A2$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdots A3$$

(3)

$$6\sin^2\theta + \sin\theta - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 = 4 \\ 2 \quad -1 = -3 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$(3\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\sin\theta = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^\circ, 150^\circ \cdots A4, A5$$

6 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

(1) $\triangle ABC$ において， $AB=1$ ， $AC=2$ ， $\angle BAC=90^\circ$ のとき， $\sin \angle ABC = \boxed{1}$ ， $\tan \angle ACB = \boxed{2}$ である。

(2) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ のとき， $\sin \theta = \boxed{3}$ である。

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき， $2\sin^2 \theta + \sqrt{3}\cos \theta - 2 = 0$ を満たす θ の値は， $\theta = \boxed{4}$ である。

(4) 関数 $f(x) = \tan^2 x + 2\tan x - 3$ ($120^\circ \leq x \leq 180^\circ$) の最小値は $\boxed{5}$ である。

解答 (1)

下図の直角三角形において三平方の定理より

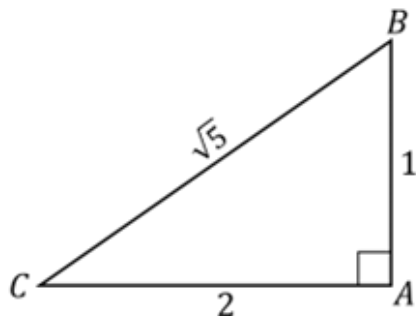
$$(BC)^2 = (AB)^2 + (CA)^2$$

$$= 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$BC = \sqrt{5}$$

$$\sin \angle ABC = \frac{CA}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdots A1$$

$$\tan \angle ACB = \frac{AB}{CA} = \frac{1}{2} \cdots A2$$



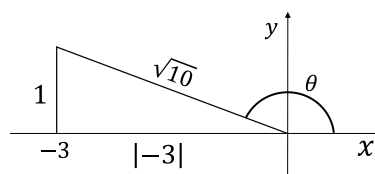
(2)

下図の $\tan \theta = -1/3$ の直角三角形において

$$\sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$OP = \sqrt{10}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \cdots A3$$



(3)

三角関数の基本恒等式より

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$2\sin^2 \theta + \sqrt{3}\cos \theta - 2 = 0$$

$$2(1 - \cos^2 \theta) + \sqrt{3}\cos \theta - 2 = 0$$

$$-2\cos^2 \theta + 2 + \sqrt{3}\cos \theta - 2 = 0$$

$$2\cos^2 \theta - \sqrt{3}\cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (2\cos \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$$

$$\theta = 30^\circ, 90^\circ \dots A4$$

(4)

補角の公式より

$$\tan 120^\circ = -\tan(180 - 120^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\tan 180^\circ = -\tan(180 - 180^\circ)$$

$$= -\tan 0^\circ = 0$$

$z = \tan x$ とおくと

$$-\sqrt{3} \leq z \leq 0$$

$$f(z) = z^2 + 2z - 3$$

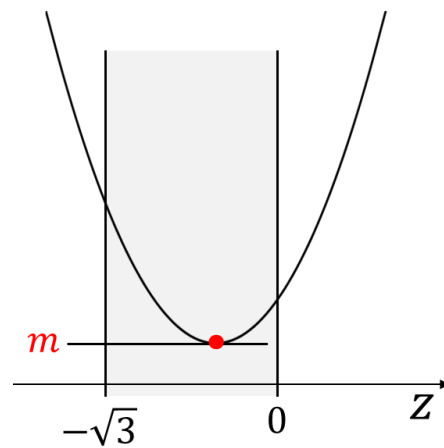
平方完成すると

$$f(z) = (z + 1)^2 - 1 - 3$$

$$= (z + 1)^2 - 4$$

下図の頂点 $(-1, -4)$ と $-\sqrt{3} \leq z \leq 0$ の関係より、最小値 m は

$$m = -4 \dots A5$$



7

次の 1 ～ 5 にあてはまるものを， 解答しなさい。

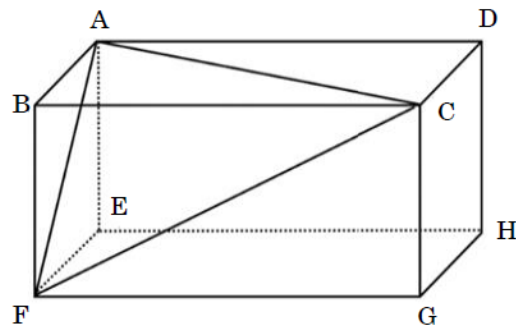
下の図のような $AB=3$, $BC=8$, $BF=4$ である直方体 $ABCD-EFGH$ がある。

(1) $AC=$ であり， $CF=$ である。

(2) $\theta = \angle AFC$ おくとき， $\cos \theta =$ である。

(3) $\triangle AFC$ の面積は である。

(4) 頂点 B から $\triangle AFC$ に垂線 BK を下ろすと， $BK=$ となる。



解答 (1)

三平方の定理より

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = 3^2 + 8^2 \\ = 9 + 64 = 73$$

$$AC = \sqrt{73} \cdots A1$$

余弦定理より

$$(CF)^2 = (BF)^2 + (BC)^2 = 4^2 + 8^2 \\ = 16 + 64 = 80$$

$$CF = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \cdots A2$$

(2)

余弦定理より

$$(AF)^2 = (AB)^2 + (BF)^2 = 3^2 + 4^2 \\ = 9 + 16 = 25$$

$$AF = \sqrt{25} = 5$$

余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{(AF)^2 + (CF)^2 - (AC)^2}{2 \cdot AF \cdot CF}$$

$$\cos \theta = \frac{5^2 + (4\sqrt{5})^2 - (\sqrt{73})^2}{2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{25 + 80 - 73}{2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{32}{2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{25} \cdots A3$$

(3)

三角関数の基本恒等式より

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{(5\sqrt{5})^2 - 4^2}{(5\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{125 - 16}{(5\sqrt{5})^2} = \frac{109}{(5\sqrt{5})^2}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{109}}{5\sqrt{5}}$$

$$\Delta ACF = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot CF \cdot \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{109}}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{109} \dots A4$$

(4)

三角錐の体積は、 ΔABC と高さ BF でも、 ΔACF と高さ BK でも求まるので、

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \right) BF = \frac{1}{3} \cdot \Delta ACF \cdot BK$$

$$BK = \frac{BA \cdot BC \cdot BF}{2\Delta ACF} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 4}{2 \cdot 2\sqrt{109}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{109}} = \frac{24\sqrt{109}}{109} \dots A5$$

一般入試参考問題

第 4 / 5 回分

1 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

(1) $A = 4x^2 - 4x - 5$, $B = x^2 + 2x - 1$ のとき, $2(A + B) - 3(A - B) =$ 1 となる。

(2) $(x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 3x + 1)$ を展開したときの x^2 の係数は 2 である。

(3) $3x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 1$ を因数分解すると, $\{3x +$ 3 $\}\{x +$ 4 $\}$ となる。

(4) $a = 3 - \sqrt{10}$ のとき, $\sqrt{a^2} =$ 5 である。

解答 (1)

$$\begin{aligned} 2(A + B) - 3(A - B) &= 5B - A \\ &= 5(x^2 + 2x - 1) - (4x^2 - 4x - 5) \\ &= 5x^2 + 10x - 5 - 4x^2 + 4x + 5 \\ &= x^2 + 14x \cdots A1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^2 \times 1 + 2x \times (-3x) + (-1) \times 2x^2 \\ 1 - 6 - 2 = -7 \cdots A2 \end{aligned}$$

(3)

$3x^2 - 2xy - y^2$ に着目し

$$\begin{array}{r} 3 \quad 1 = 1 \\ 1 \quad -1 = -3 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 1 \\ = (3x + y + a)(x - y + b) \end{aligned}$$

$a \times b = 1$ なので

$$\begin{array}{r} 3x + y \quad -1 = -x + y \\ x - y \quad -1 = -3x - y \\ \hline -4x \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 1 \\ = (3x + y - 1)(x - y - 1) \cdots A3, A4 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 1 \\ = (3x + ay + b)(x + py + q) \\ ap = -1 \end{aligned}$$

$$(a, p) = (1, -1) \text{ or } (-1, 1)$$

$$3p + a = -2$$

$$(a, p) = (1, -1)$$

$$= (3x + y + b)(x - y + q)$$

$$bq = 1$$

$$(b, q) = (1, 1) \text{ or } (-1, -1)$$

$$3q + b = -4$$

$$(b, p) = (-1, -1)$$

$$= (3x + y - 1)(x - y - 1) \cdots A3, A4$$

(4)

$$a = 3 - \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (3 - \sqrt{10})^2 = 9 + 10 - 6\sqrt{10} \\ &= 19 - 2\sqrt{90} \end{aligned}$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{p} - \sqrt{q} \quad (\sqrt{a^2} > 0 \text{ 且 } p > q)$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 \\ &= p + q - 2\sqrt{pq} = 9 + 10 - 6\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$p + q = 19$$

$$pq = 90$$

$$(p, q) = (10, 9)$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{10} - \sqrt{9} = \sqrt{10} - 3 \quad \dots A5$$

2 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

(1) 連立不等式 $\begin{cases} 2x - 5 \leq 9x + 3 \\ x^2 - 2x - 7 \leq 0 \end{cases}$ を解くと, 1 である。

(2) 循環小数の和 $1.0\dot{2}5 + 0.0\dot{7}5$ を計算すると, 2 である。

(3) 2 次方程式 $x^2 + 4|x - 1| = 1$ の実数解は, $x = 3$ である。

(4) $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$, $y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ のとき, $x - y = 4$, $x^2 + y^2 = 5$ である。

解答 (1)

$$2x - 5 \leq 9x + 3$$

$$7x \geq -8$$

$$x \geq -\frac{8}{7} \quad (1)$$

$$x^2 - 2x - 7 \leq 0$$

解の公式より

$$1 \pm \sqrt{1 + 7} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$1 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 1 + 2\sqrt{2} \quad (2)$$

(1), (2) を満たすのは

$$-\frac{8}{7} \leq x \leq 1 + 2\sqrt{2} \cdots A1$$

(2)

$$1.025252525$$

$$+ 0.075757575$$

$$= 1.101010101 \cdots = 1.\dot{1}\dot{0} \cdots A2$$

(3)

$$x^2 + 4|x - 1| = 1$$

$x \geq 1$ のとき

$$x^2 + 4(x - 1) = 1$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = -5, 1$$

$x \geq 1$ より

$$x = 1 \quad (1)$$

$x < 1$ のとき

$$x^2 - 4(x - 1) = 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1, 3$$

$x < 1$ より解無し。よって

$$x = 1 \cdots A3$$

(4)

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\&= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\&= \frac{5 + 3 - 2\sqrt{5}\sqrt{3}}{5 - 3} \\&= \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \\&= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\&= \frac{5 + 3 + 2\sqrt{5}\sqrt{3}}{5 - 3} \\&= \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - y &= 4 - \sqrt{15} - (4 + \sqrt{15}) \\&= -2\sqrt{15} \dots A4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (4 - \sqrt{15})^2 + (4 + \sqrt{15})^2 \\&= 4^2 + (\sqrt{15})^2 - 8\sqrt{15} \\&\quad + 4^2 + (\sqrt{15})^2 + 8\sqrt{15} \\&= 16 + 15 + 16 + 15 = 62 \dots A5\end{aligned}$$

3 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

二次関数 C の式を $y=2x^2-4x+1$ とする。

(1) C のグラフの頂点の座標は 1 である。

(2) C のグラフを、 x 軸に関して対称移動したものの式は 2 である。

(3) C のグラフを、 x 軸方向に 1、 y 軸方向に 1 平行移動したものの式は 3 である。

(4) C のグラフを、原点に関して対称移動したものの式は 4 である。

(5) 定義域 $-3 \leq x \leq 3$ における二次関数 C の最大値を M 、最小値を m としたとき、 $M-m$ の値は 5 である。

解答(1)

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

とおく。平方完成すると

$$y = 2x^2 - 4x + 1$$

$$= 2(x^2 - 2x) + 1$$

$$= 2(x-1)^2 - 2 + 1$$

$$= 2(x-1)^2 - 1$$

$$\text{頂点}(1, -1) \cdots A1$$

(2)

x 軸に関して対象移動すると

$$y \rightarrow -y$$

$$-y = f(x)$$

$$y = -f(x) = -2x^2 + 4x - 1 \cdots A2$$

(3)

x 軸方向に 1、 y 軸方向に 1 平行移動する
と

$$x \rightarrow x-1, y \rightarrow y-1$$

$$y-1 = f(x-1)$$

$$y = 2(x-1)^2 - 4(x-1) + 1 + 1$$

$$= 2(x^2 - 2x + 1) - 4x + 4 + 2$$

$$= 2x^2 - 4x + 2 - 4x + 6$$

$$= 2x^2 - 8x + 8 \cdots A3$$

(4)

原点に関して対象移動すると

$$x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$$

$$y = -f(-x)$$

$$= -f(x) = -2(-x)^2 + 4(-x) - 1$$

$$= -2x^2 - 4x - 1 \cdots A4$$

(5)

図より、頂点(1, -1)で最小値を取るの
で

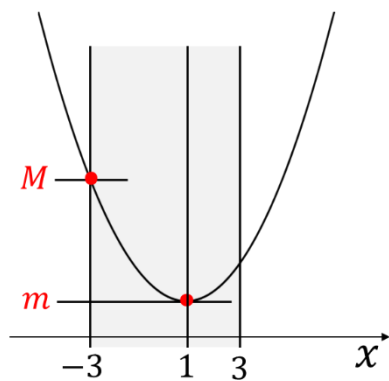
$$m = -1$$

$x = -3$ で最大値を取るの

$$M = f(-3) = 2(-3)^2 - 4(-3) + 1$$

$$= 18 + 12 + 1 = 31$$

$$M - m = 31 - (-1) = 32 \cdots A4$$



4 次の **1** ～ **5** にあてはまるものを， 解答しなさい。

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ とおき， 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。

(1) C の軸は， 直線 $x =$ **1** である。

(2) 関数 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値は **2**， 最小値は **3** である。

(3) C を y 軸方向に -4 だけ平行移動して得られる放物線と x 軸との異なる 2 つの交点を A ， B とするとき， 線分 AB の長さは **4** である。

(4) C の頂点を P とし， C を原点 O に関して対称移動して得られる放物線の頂点を Q とする。 線分 PQ を 1 つの対角線とする正方形の面積は **5** である。

解答 (1)

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 3$$

平方完成すると

$$y = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3$$

$$= (x - 2)^2 - 1$$

よって、軸の関数は

$$x = 2 \cdots A1$$

(2)

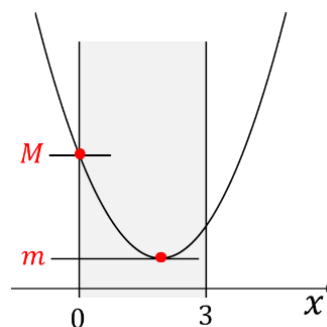
下図の頂点 $(2, -1)$ と $0 \leq x \leq 3$ の関係より、最大値 M は

$$M = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3$$

$$= 3 \cdots A2$$

$y = f(x)$ のグラフのの範囲内にある (右図) ので、最小値 m は

$$m = -1 \cdots A3$$



(3)

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$y \rightarrow y + 4$$

と置き換えると

$$y + 4 = x^2 - 4x + 3$$

$$y = x^2 - 4x + 3 - 4$$

$$= x^2 - 4x - 1$$

解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$AB = 2 \times \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \sqrt{4^2 + 4}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \cdots A4$$

(4)

$y = f(x)$ のグラフの頂点 P は $(2, -1)$ である。それを原点に関して対象移動（下図）して得られる点 Q は $(-2, 1)$ であるので

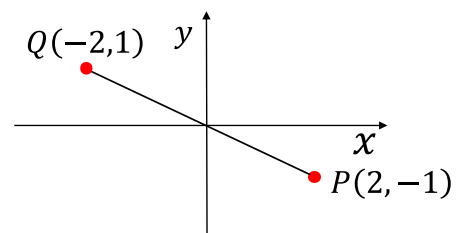
$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(2+2)^2 + (1+1)^2} \\ &= \sqrt{16+4} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

対角線 $PQ = 2\sqrt{5}$ の正方形の辺の長さは

$$\frac{PQ}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}$$

正方形の面積は

$$(\sqrt{10})^2 = 10 \cdots A5$$



5

次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

- (1) 放物線 $y = x^2 + 2x + a^2 - 4$ が x 軸に接するとき、定数 a の値は 1 である。ただし、 $a > 0$ とする。
- (2) 放物線 $y = x^2 - 5x + 2$ と直線 $y = kx + 1$ の共有点の個数が 2 個であるとき、定数 k の値の範囲は 2 である。
- (3) 2 次不等式 $x^2 + ax + a + 3 > 0$ の解がすべての実数であるとき、定数 a の値の範囲は 3 である。
- (4) 方程式 $(x + 2)|x - 1| = k$ の実数解の個数が 3 個であるとき、定数 k の値の範囲は 4 であり、実数解の個数が 1 個であるとき、定数 k の値の範囲は 5 である。

解答 (1)

$$y = x^2 + 2x + a^2 - 4$$

が x 軸と接するので、

$$x^2 + 2x + a^2 - 4 = 0$$

の判別式

$$D = 2^2 - 4 \cdot (a^2 - 4) = 0$$

$$4 - 4a^2 + 16 = 0$$

$$4a^2 = 20$$

$$a^2 = 5$$

 $a > 0$ より

$$a = \sqrt{5} \cdots A1$$

(2)

$$y = x^2 - 5x + 2$$

$$y = kx + 1$$

の 2 式が共有点では成り立つので

$$x^2 - 5x + 2 = kx + 1$$

$$x^2 - (k + 5)x + 1 = 0$$

(共有点が 2 つ) = (解が 2 つ) の

で、判別式

$$D = (k + 5)^2 - 4 > 0$$

$$(k + 5)^2 > 4$$

$$k + 5 < -2, 2 < k + 5$$

$$k < -7, -3 < k \cdots A2$$

(3)

$$y = f(x) = x^2 + ax + a + 3 > 0$$

の解がすべての実数なので、 $y = f(x)$ の

最小値は0より大きい。言い換えると

$f(x) = 0$ は解を持たないので、判別式

$$D = a^2 - 4(a + 3) < 0$$

$$a^2 - 4a - 12 < 0$$

$$(a + 2)(a - 6) < 0$$

$$-2 < a < 6 \cdots A3$$

(4) (かなり難しい問題)

$$(x + 2)|x - 1| = k$$

$$|x - 1| = \frac{k}{x + 2}$$

$$f(x) = x - 1$$

$$g(x) = \frac{k}{x + 2}$$

と置くと、 $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラ

フは右図のようになる。 $k > 0$ で k の値

が小さいとき、 $y = g(x)$ のグラフは $y =$

$|f(x)|$ のグラフと3点で交わり、そのう

ち $y = -f(x)$ のグラフとは2点で交わ

る。2点の交点では、

$$-f(x) = g(x), \quad k > 0$$

$$-x + 1 = \frac{k}{x + 2}, \quad k > 0$$

$$(x + 2)(-x + 1) = k$$

$$x^2 + x + k - 2 = 0$$

2つの実数解を持つには、判別式が

$$D = 1^2 - 4(k - 2) > 0$$

$$-4k + 9 > 0$$

$$k < \frac{9}{4}$$

$$0 < k < \frac{9}{4} \cdots A4$$

下図より、実数解が1個であるときは、

$k > 0$ の場合、 $-f(x) = g(x)$ が解を持たないときなので

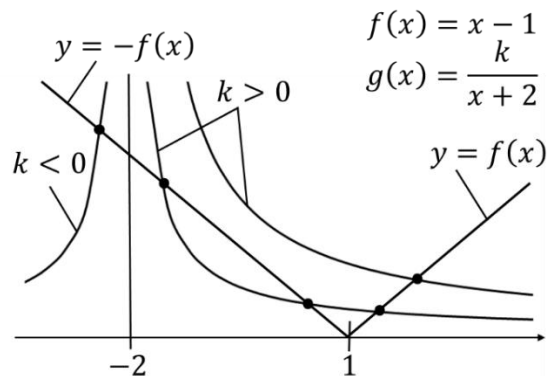
$$D = 1^2 - 4(k - 2) < 0$$

$$k > \frac{9}{4}$$

一方、 $k < 0$ のとき、 k の値によらず実

数解は1つである。よって

$$k < 0, \frac{9}{4} < k \cdots A5$$



6 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

(1) $\cos 60^\circ \cos 150^\circ - \sin 60^\circ \sin 150^\circ =$ 1 である。

(2) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\sin \theta + \cos \theta =$ 2 , $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta =$ 3 である。
ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

(3) $\triangle ABC$ において、 $AC = 1$, $BC = 2 + \sqrt{3}$, $\angle ACB = 90^\circ$ とする。
辺 BC 上に $BD = 2$, $DC = \sqrt{3}$ となる点 D をとると、 $\angle ADC = 30^\circ$ となる。
このとき、 $AB =$ 4 , $\sin 15^\circ =$ 5 である。

解答(1)

補角の定理より

$$\cos 150^\circ = -\cos(180^\circ - 150^\circ)$$

$$= -\cos 30^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ$$

これらを与式に代入すると

$$\cos 60^\circ \cos 150^\circ - \sin 60^\circ \sin 150^\circ$$

$$= -\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots A1$$

(2)

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2$$

$$= \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$+ \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2$$

より

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 2$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \cdots A2$$

$$\text{※} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{より、} -\frac{\sqrt{7}}{2} \text{は不可}$$

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta$$

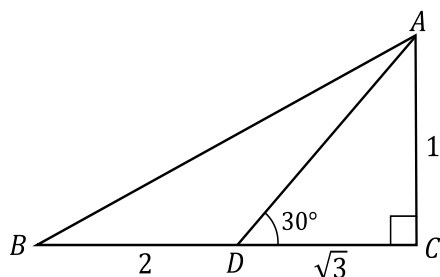
$$= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \cdots A3$$

(3)



上図と三平方の定理より

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= 1^2 + (2 + \sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{12}\end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= a + b + 2\sqrt{ab} = 8 + 2\sqrt{12}\end{aligned}$$

より

$$a + b = 8$$

$$ab = 12$$

より

$$a = 6, b = 2$$

$$AB = \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad \dots A4$$

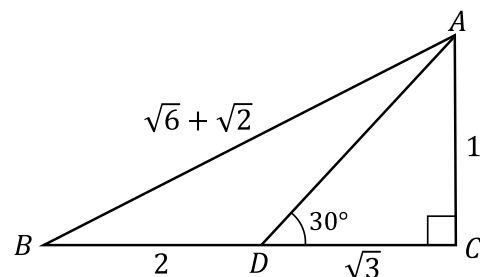
$\angle ADC = 30^\circ$ の直角三角形 $\triangle ADC$ なので

$$AD = BD = 2$$

$\triangle ABD$ は $\angle ADC = 30^\circ$ と $AD = BD$ の二等辺三角形なので

$$\angle ABD = \angle BAD = 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \dots A4$$



$\angle ADC = 30^\circ$ の直角三角形 $\triangle ADC$ なので

$$AD = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$\angle ADC = 30^\circ$ であり、 $\triangle ABD$ は $AD = BD$ の二等辺三角形なので

$$\angle ABD = \angle BAD = 15^\circ$$

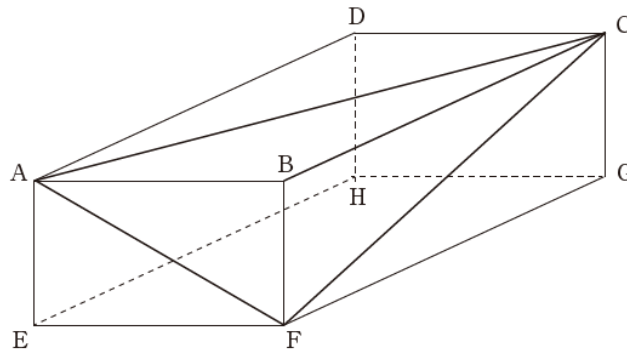
直角三角形 $\triangle ABC$ において

$$\sin \angle ABD = \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \dots A5$$

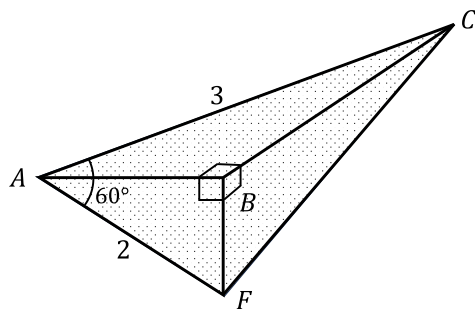
7 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

下の図で，直方体ABCD-EFGHの4頂点A，B，C，Fを結んでできる四面体ABCFにおいて， $AC=3\text{ cm}$ ， $AF=2\text{ cm}$ ， $\angle CAF=60^\circ$ である。



- (1) CFの長さは， 1 cmである。
- (2) $AB=2\text{ cm}$ ， $BC=3\text{ cm}$ ， $BF=4\text{ cm}$ である。
- (3) 四面体ABCFに内接する球の半径は， 5 cmである。

解答(1)



$\triangle ACF$ において余弦定理より

$$(CF)^2 = (AC)^2 + (AF)^2 - 2 \cdot AC \cdot AF \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 9 + 4 - 6 = 7$$

$$CF = \sqrt{7} \dots A1$$

(2)

三平方の定理より

$$(AB)^2 + (BF)^2 = 2^2 = 4$$

$$(AB)^2 + (BC)^2 = 3^2 = 9$$

$$(BC)^2 + (BF)^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$$

上の3元連立方程式を解くと

$$(AB)^2 = 3$$

$$(BC)^2 = 6$$

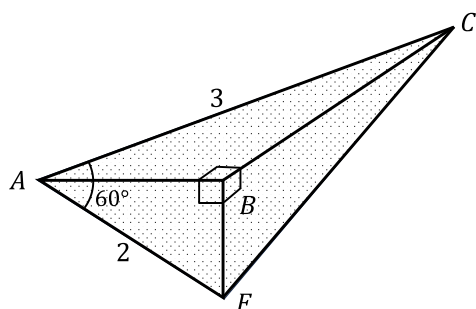
$$(BF)^2 = 1$$

$$AB = \sqrt{3} \dots A2$$

$$BC = \sqrt{6} \dots A3$$

$$BF = 1 \dots A4$$

(3)



三角形 $\triangle ACF$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle ACF &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AF \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

また、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle ABF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle BCF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

球の中心を O 半径を r とする。三角錐は
4つの三角錐 $OABC, OABF, OBCF, OACF$
に分割できるので、全体の体積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BF \right) BC \\ &= \frac{1}{3} (\triangle ABC + \triangle ABF + \triangle BCF + \triangle ACF) r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &= \frac{AB \cdot BF \cdot BC}{2(\triangle ABC + \triangle ABF + \triangle BCF + \triangle ACF)} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{6}}{2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{6}} \\ &= \frac{6}{6 + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}} \cdots A5\end{aligned}$$

一般入試参考問題

第 5 / 5 回分

1 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

(1) $A=x+2y$, $B=3x-y$ のとき， $A^2-2AB+B^2$ を計算すると， 1 となる。

(2) $2(x-1)(x+2)(x-3)$ を展開したときの二次の項 x^2 の係数は 2 である。

(3) $8x^2+2xy-3y^2$ を因数分解すると， (3) (4) となる。
ただし， 3 の式の x の係数は 4 の式の x の係数より小さいものとする。

(4) $A=x^2-8x+7$ とする。 $x=\sqrt{3}+4$ のとき， $A=$ 5 である。

解答 (1)

$$A-B=x+2y-(3x-y)=-2x+3y$$

$$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$$

$$=(-2x+3y)^2$$

$$=4x^2-12xy+9y^2 \cdots A1$$

(4)

$$x=\sqrt{3}+4$$

$$A=x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$$

$$=(\sqrt{3}+4-1)(\sqrt{3}+4-7)$$

$$=(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)=(\sqrt{3})^2-3^2$$

$$=3-9=-6 \cdots A5$$

(2)

x^2 の係数を抜き出すと

$$2(-1+2-3)=-4 \cdots A2$$

(3)

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 = 6 \\ 2 \quad -1 = -4 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$8x^2+2xy-3y^2$$

$$=(2x-y)(4x+3y) \cdots A3, A4$$

2 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを， 解答しなさい。

(1) 不等式 $\frac{x}{3} - \frac{1}{4} > \frac{5(x-2)}{6}$ を満たす正の整数 x の個数は 1 個である。

(2) 循環小数 $0.\dot{1}3\dot{5}$ を既約分数で表すと， 2 である。

(3) 方程式 $|3x - 7| = x + 1$ の解は， $x = 3$ である。

(4) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ の整数部分を a ， 小数部分を b とするとき， $a = 4$ であり，
 $a^2 + 2ab + 2b^2 = 5$ である。ただし， $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ の整数部分とは， $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ を超えない最大の整数をいう。

解答 (1)

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{4} > \frac{5(x-2)}{6} \quad (1)$$

(1) $\times 12$ は

$$4x - 3 > 10(x - 2)$$

$$4x - 3 > 10x - 20$$

$$17 > 6x$$

$$x < \frac{17}{6}$$

$$x \leq 2$$

$$x = 0, 1, 2$$

$$3 \cdots A1$$

(2)

$$0.\dot{1}3\dot{5} \times 1000 - 0.\dot{1}3\dot{5}$$

$$= 135.\dot{1}3\dot{5} - 0.\dot{1}3\dot{5}$$

$$= 135 \quad (1)$$

一方

$$0.\dot{1}3\dot{5} \times 1000 - 0.\dot{1}3\dot{5}$$

$$= 0.\dot{1}3\dot{5}(1000 - 1)$$

$$= 0.\dot{1}3\dot{5} \times 999 \quad (2)$$

(2) = (1) より

$$0.\dot{1}3\dot{5} \times 999 = 135$$

$$0.\dot{1}3\dot{5} = \frac{135}{999} = \frac{3^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 37} = \frac{5}{37} \cdots A2$$

(3)

$$y = |3x - 7|$$

$$y = x + 1$$

の両関数のグラフは下図のようになる。

左の交点は

$$y = -(3x - 7)$$

$$y = x + 1$$

の両グラフの交点なので

$$-(3x - 7) = x + 1$$

$$-3x + 7 = x + 1$$

$$6 = 4x$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

右の交点は

$$y = 3x - 7$$

$$y = x + 1$$

の両グラフの交点なので

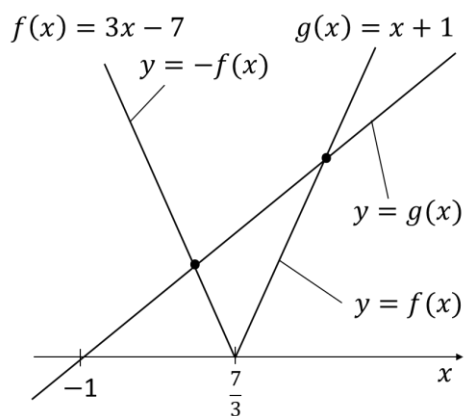
$$3x - 7 = x + 1$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

よって、 $|3x - 7| = x + 1$ の解は

$$x = \frac{3}{2}, 4 \cdots A3$$



(4)

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 2^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = \sqrt{5} + 2$$

$$2^2 < 5 < 3^2 \text{ より}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$4 < \sqrt{5} + 2 < 5$$

$$a = 4 \cdots A4$$

$$b = \sqrt{5} + 2 - 4 = \sqrt{5} - 2$$

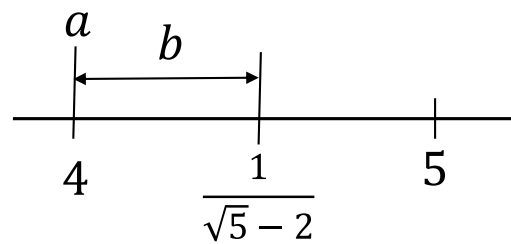
$$b^2 = (\sqrt{5} - 2)^2 \\ = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$a^2 + 2ab + 2b^2$$

$$= 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (\sqrt{5} - 2) + 2(9 - 4\sqrt{5})$$

$$= 16 + 8\sqrt{5} - 16 + 18 - 8\sqrt{5}$$

$$= 18 \cdots A5$$



3 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、解答しなさい。

(1) $U = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の自然数}\}$ を全体集合として、その部分集合

$$A = \{x \mid 3 \leq x \leq 8, x \text{ は自然数}\}$$

$$B = \{x \mid 4 < x < 9, x \text{ は自然数}\}$$

について、 $\overline{A \cap B} =$ 1 である。ただし、 $\overline{A \cap B}$ は、 U に関する $A \cap B$ の補集合を表す。

(2) a, b は実数とする。 $a^2 + b^2 = 0$ は $a = 0$ であるための 2 。

(3) 次のような、それぞれ 5 個の数からなる 2 つのデータ X, Y がある。

X	2	2	5	7	9
Y	13	12	10	7	3

X の平均は 3 であり、 Y の分散は 4 である。また、 X と Y の相関係数は 5 である。

解答(1)

$4 < x < 9$ は $5 \leq x \leq 8$ に等しいので

$$A \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$$

U から $A \cap B$ を除外すると

$$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\} \cdots A1$$

別解

$$\bar{A} = \{1, 2, 9, 10\}$$

$$\bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$$

ドモルガンの法則より

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\} \cdots A1$$

(2)

$$a^2 + b^2 = 0$$

より

$$a^2 = b^2 = 0$$

$$a = b = 0$$

となり、 $p: a^2 + b^2 = 0$ から $q: a = 0$ が導けるので、 $p \Rightarrow q$ 。一方、

$$a = 0, b = 1$$

は、 $a^2 + b^2 = 0$ を満たさないなので、 $q \not\Rightarrow p$ 。よって、 $a^2 + b^2 = 0$ は $a = 0$ であるための

十分条件であるが、必要条件ではない。

… A2

(3)

$$\sum X = 2 + 2 + 5 + 7 + 9 = 26$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{25}{5} = 5 \quad \dots A3$$

$$\sum Y = 13 + 12 + 10 + 7 + 3 = 45$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{45}{5} = 9$$

$$\begin{aligned} \sum (Y - \bar{Y})^2 &= 4^2 + 3^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-6)^2 \\ &= 16 + 9 + 1 + 4 + 36 = 66 \end{aligned}$$

s^2 : 分散

$$s^2 = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{N} = \frac{66}{5} = 13.2 \quad \dots A4$$

$$\begin{aligned} \sum (X - \bar{X})^2 &= (-3)^2 + (-3)^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 \\ &= 9 + 9 + 0 + 4 + 16 = 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) &= (-3)4 + (-3)3 + 0 \cdot 1 \\ &\quad + 2(-2) + 4(-6) \\ &= -12 - 9 - 4 - 24 \\ &= -49 \end{aligned}$$

r : 相関係数

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \cdot \sum (Y - \bar{Y})^2}} \\ &= \frac{-49}{\sqrt{38 \cdot 66}} = -\frac{49}{2\sqrt{627}} \\ &= -\frac{49\sqrt{627}}{1254} \quad \dots A5 \end{aligned}$$

4 次の 1 ~ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

(1) $f(x) = 2x^2 + 12x + 7$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。

① C を x 軸方向に 4 , y 軸方向に 8 平行移動すると、関数 $y =$ 1 のグラフと重なる。

② C を x 軸に関して対称移動したのち、原点に関して対称移動すると、関数 $y =$ 2 のグラフと重なる。

③ 関数 $y = f(x)$ ($-4 \leq x \leq 0$) の値域は 3 である。

(2) 方程式 $|x - 4|(x + 2) = k$ が 3 個の異なる実数解を持つとき、実数の定数 k の値の範囲は、
4 $< k <$ 5 である。

解答(1) ①

$$y - 8 = f(x - 4)$$

$$y = 2(x - 4)^2 + 12(x - 4) + 7 + 8$$

$$= 2(x^2 - 8x + 16) + 12x - 48 + 15$$

$$= 2x^2 - 4x - 1 \cdots A1$$

② x 軸に関して対象移動すると

$$y \rightarrow -y$$

$$-y = f(x)$$

原点に関して対象移動すると

$$-y \rightarrow y, x \rightarrow -x$$

$$-(-y) = f(-x)$$

$$y = f(-x) = 2(-x)^2 + 12(-x) + 7$$

$$= 2x^2 - 12x + 7 \cdots A2$$

③

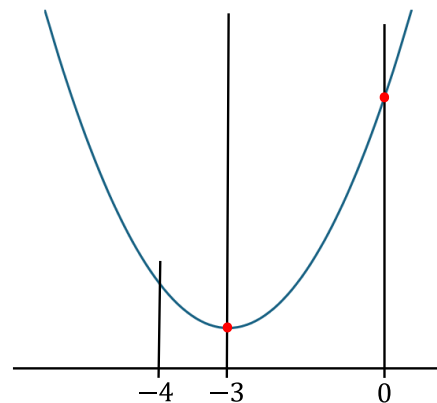
平方完成すると

$$y = 2x^2 + 12x + 7 = 2(x^2 + 6x) + 7$$

$$= 2(x + 3)^2 - 18 + 7$$

$$= 2(x + 3)^2 - 11$$

軸は $x = -3$



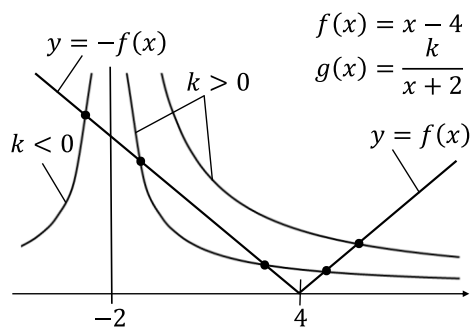
図より最小値と最大値は

$$y = f(-3) = -11$$

$$y = f(0) = 7$$

$$-11 \leq y \leq 7 \cdots A3$$

(2)



上図より $y = -x + 4$ のグラフと $y =$

$\frac{k}{x+2} (k > 0)$ のグラフが 2 点で交わると

き、3 つの実数解を持つので、

$$k > 0 \quad (1)$$

交点では

$$\frac{k}{x+2} = -x + 4$$

$$x^2 - 2x + k - 8 = 0$$

2 つの実数解を持つには

$$D = 2^2 - 4(k - 8) = -4k + 36 > 0$$

$$k < 9 \quad (2)$$

(1), (2) より

$$0 < k < 9 \cdots A4, A5$$

5 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

関数 $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 4 - 2a^2$ とする。ただし， a は定数である。

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて，頂点の x 座標を a の式で表すと， $x =$ 1 である。 a の値を変化させたとき，頂点の y 座標は， $a =$ 2 のとき，最大値 3 をとる。

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が 1 より大きい 2 つの異なる解を持つような a の範囲は， 4 である。

(3) $y = f(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さが 4 のとき， $a =$ 5 である。

解答 (1)

平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2(a-2)x + 4 - 2a^2 \\ &= [x + (a-2)]^2 - (a-2)^2 + 4 - 2a^2 \\ &= [x + (a-2)]^2 \\ &\quad - (a^2 - 4a + 4) + 4 - 2a^2 \end{aligned}$$

$$= [x + (a-2)]^2 - 3a^2 + 4a$$

頂点の x 座標は

$$x = 2 - a \cdots A1$$

頂点の y 座標は

$$y = -3a^2 + 4a = -3\left(a^2 - \frac{4}{3}a\right)$$

$$= -3\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

頂点の y が最大値をとるのは、

$$a = \frac{2}{3} \cdots A2$$

$$y = \frac{4}{3} \cdots A3$$

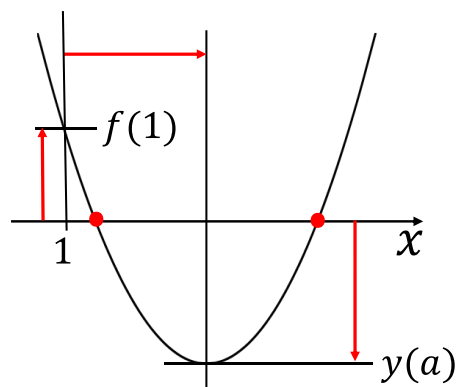
(2)

1 より大きい 2 つの解を持つには、軸の $x > 1$ 、かつ頂点の $y < 0$ 、かつ $f(1) > 0$ の 3 条件満たす必要あり (図)。

軸の $x > 1$

$$2 - a > 1$$

$$a < 1 \quad (1)$$



頂点の $y < 0$

$$-3a^2 + 4a < 0$$

$$a(3a - 4) > 0$$

$$a < 0, \frac{4}{3} < a \quad (2)$$

$$f(1) > 0$$

$$1^2 + 2(a - 2) + 4 - 2a^2 > 0$$

$$2a^2 - 2a - 1 < 0$$

解の公式より

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

(1), (2), (3) を満たすのは

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < a < 0 \cdots A4$$

(3)

$$[x + (a - 2)]^2 - 3a^2 + 4a = 0$$

$$[x + (a - 2)]^2 = 3a^2 - 4a$$

$$x + (a - 2) = \pm \sqrt{3a^2 - 4a}$$

上式より、切り取る線分の長さは

$$2 \times \sqrt{3a^2 - 4a} = 4$$

$$\sqrt{3a^2 - 4a} = 2$$

$$3a^2 - 4a = 4$$

$$3a^2 - 4a - 4 = 0$$

$$(3a + 2)(a - 2) = 0$$

$$a = -\frac{2}{3}, 2 \cdots A5$$

6 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを，解答しなさい。

三角形 ABC で， $AB=BC=3$ ， $CA=4$ とする。

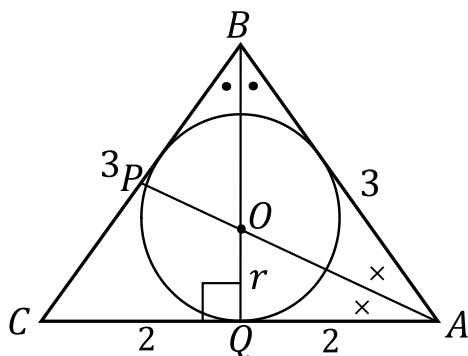
(1) $\sin \angle A =$ である。

(2) $\cos \angle B =$ である。

(3) 三角形 ABC の内接円の半径を r とすると， $r =$ である。

(4) 三角形 ABC の内接円の中心を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。このとき
 $BP =$ ， $AP =$ である。

解答(1)



$\angle B$ の二等分線を辺 AC に下すと，上図の直角三角形になるので、

$$BQ = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\sin \angle A = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdots A1$$

(2)

$\triangle ABC$ に対する余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle B &= \frac{(AB)^2 + (BC)^2 - (CA)^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{9} \cdots A2 \end{aligned}$$

(3)

$\triangle ABC$ はそれぞれ辺に対し r を高さとする 3 つの三角形に分割できるので、

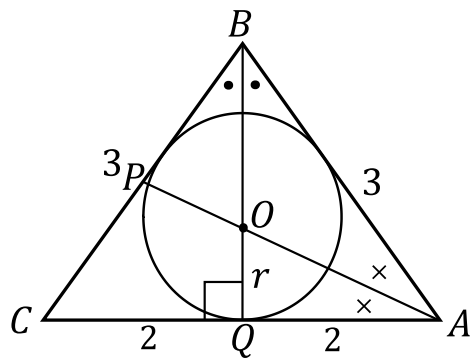
$\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AC \cdot BQ = \frac{1}{2} r (AB + BC + CA)$$

$$r = \frac{AC \cdot BQ}{AB + BC + CA} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{3 + 3 + 4}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdots A3$$

(4)



$BP = x$ とおくと

$$CP = 3 - x$$

直線AOは $\angle A$ の二等分線なので、角の二等分線の公式より

$$BP:CP = AB:AC$$

$$x:3-x = 3:4$$

$$4x = 3(3-x)$$

$$x = BP = \frac{9}{7} \cdots A4$$

$\triangle ABP$ に対する余弦定理より

$$(AP)^2 = (BP)^2 + (AB)^2$$

$$-2 \cdot BP \cdot AB \cdot \cos \angle B$$

$$= \left(\frac{9}{7}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot \frac{9}{7} \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{480}{7^2}$$

$$AP = \frac{\sqrt{480}}{7} = \frac{4\sqrt{30}}{7} \cdots A5$$

7 次の 1 ～ 5 にあてはまるものを、 解答しなさい。

- (1) 全体集合 $U = \{x \mid x \text{ は } 60 \text{ 以下の自然数}\}$ とし、その部分集合 A, B について
 $A = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 60 \text{ の約数}\}$, $B = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 4 \text{ の倍数}\}$ とする。
このとき、集合 C を A と B の共通部分とすると、 C の要素の個数は 1 である。
- (2) x, y を実数とすると、 $x^2 + y^2 = 0$ は、 2 であるための必要十分条件である。
- (3) 100 人の身長(cm)と体重(kg)について調査した結果、以下のようなデータが得られた。
なお、すべて上述の単位に基づいて計算したものであり、以下では単位の表記を省略する。
- ・身長の偏差の 2 乗の総和は 8100 であった。
 - ・体重の標準偏差は 16 であった。
 - ・身長と体重の共分散は 120 であった。
- このとき、身長の分散は 3 で、標準偏差は 4 である。
また、身長と体重の相関係数は約 5 である。
(必要なときは小数第 3 位で四捨五入せよ)

(2)の選択肢

- 2 ア $x=0$ イ $x=0$ かつ $y=0$ ウ $x=0$ または $y=0$
エ $x+y=0$ オ $xy=0$

解答(1)

素因数分解すると

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

60 の約数は、2,3,5および2,2,3,5から取

り出した数の組み合わせの積。そのう

ち 4 の倍数は、 $2 \times 2 = 4$ と 1,3,5,15(=

3×5)の 4 つの数との積なので、

4 … A1

(2)

$$P: x^2 + y^2 = 0$$

$$Q: x = 0 \cap y = 0 \cdots A2$$

$$x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

より

$$x^2 = 0 \cap y^2 = 0$$

$$x = 0 \cap y = 0$$

よって $P \Rightarrow Q$

一方

$$x = 0 \cap y = 0$$

$$x^2 = 0 \cap y^2 = 0$$

より

$$x^2 + y^2 = 0$$

よって $Q \Rightarrow P$

従って P は Q であるための必要十分条件 $P \Leftrightarrow Q$ である。

他の選択肢の一つを R とすると、いずれの選択肢も $R \not\Leftrightarrow P$ である（反例が存在する）。

(3)

分散 s^2 と標準偏差 s の定義式より

$$s^2 = \frac{\text{偏差の2乗の総和}}{\text{サンプル数}} = \frac{8100}{100}$$

$$= 81 \cdots A3$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{81} = 9 \cdots A4$$

相関係数

$$= \frac{\text{共分散}}{(\text{身長標準偏差})(\text{体重標準偏差})}$$

$$= \frac{120}{9 \cdot 16} = \frac{5}{6} = 0.83 \cdots A4$$