

1 次の問いに答えよ。

(1) $a = -3, b = -2$ のとき、 $-a^2 + 3a + b^2 - 2b - 7$ の値を求めよ。

- ① -21 ② -17 ③ -11 ④ -3 ⑤ 1

(2) $(-3xy^3)^2 \times (2xy)^3$ を計算せよ。

- ① $-72x^6y^8$ ② $72x^6y^8$ ③ $-72x^5y^9$ ④ $72x^5y^9$
⑤ $-72x^5y^{12}$

(3) 整式A, Bについて、 $A + B = x^2 + 2x + 1, A - B = 3x^2 - 10x + 7$ のとき、 $3A + B$ を求めよ。

- ① $-x^2 + 14x - 5$ ② $-x^2 + 6x - 3$ ③ $5x^2 - 6x + 9$
④ $5x^2 + 6x - 3$ ⑤ $2x^2 - 4x + 4$

(4) $(x + y + 2)(x - y + 2)$ を展開せよ。

- ① $x^2 + 4x + y^2 + 4$ ② $x^2 - y^2 + 4$ ③ $x^2 + 4x - y^2 + 4$
④ $x^2 - 2xy + y^2 + 4$ ⑤ $x^2 - 2xy - y^2 + 4$

(5) $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}, y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ のとき、 $x^2y + xy^2$ の値を求めよ。

- ① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

2 次の問いに答えよ。

(1) 二つの集合 $A = \{x, y, 8\}$, $B = \{2, 6, 7, 8\}$ が $A \subset B$ を満たすとき、考えられる x, y の値を1組答えよ。

- ① $x = 1, y = 6$ ② $x = 2, y = 6$ ③ $x = 4, y = 6$
④ $x = 4, y = 7$ ⑤ $x = 5, y = 7$

(2) 条件文「 $x = 3$ は $x^4 = 81$ であるための 」について、□にあてはまるものを答えよ。

- ① 必要十分条件である。
② 必要条件であるが、十分条件でない。
③ 十分条件であるが、必要条件でない。
④ 必要条件でも十分条件でもない。
⑤ 命題でないので、判断できない。

(3) $-3 \leq a < 2$, $1 \leq b < 5$ のとき、 $a - b$ の値の範囲を求めよ。

- ① $a - b < -8$, $a - b > 1$ ② $a - b < -8$, $a - b \geq 1$
③ $-8 < a - b \leq 1$ ④ $-8 \leq a - b < 1$
⑤ $-8 < a - b < 1$

(4) 不等式 $|3x - 6| \leq 12$ を解け。

- ① $-2 \leq x \leq 6$ ② $-6 \leq x \leq 6$ ③ $x \leq 6$
④ $x \geq -2$ ⑤ $x \leq -2, x \geq 6$

(5) 不等式 $\begin{cases} x + 2 < 2x + 4 \\ 3x - 1 \leq x + 9 \end{cases}$ を解け。

- ① $x < -2$ ② $x \geq 5$ ③ $x < -2, x \geq 5$ ④ $-2 < x \leq 5$
⑤ 解なし

3

2次関数 $y = -x^2 + 4x + k^2 - 2k - 19$ について、次の問いに答えよ。

(1) この2次関数が最大値をとるときの x の値を求めよ

- ① $x = -2$ ② $x = -1$ ③ $x = 0$ ④ $x = 1$ ⑤ $x = 2$

(2) この2次関数のグラフが x 軸と2点で交わるとき、 k の範囲を求めよ。

- ① $k < -3, k > 5$ ② $k < -2, k > 2$
③ $-2 < k < 2$ ④ $-2 < k < 19$
⑤ $-1 < k < 3$

(3) この2次関数のグラフが原点を通るとき、 k の値を求めよ。

- ① $k = 2, -19$ ② $k = 3, -5$ ③ $k = 1 \pm 2\sqrt{5}$ ④ $k = -2 \pm \sqrt{3}$
⑤ $k = 0$

(4) $k = 6$ のとき、 $3 \leq x \leq 6$ でこの2次関数がとる値の範囲を求めよ。

- ① $y \leq -7, 8 \leq y \leq 9$ ② $-7 \leq y \leq 8$ ③ $-7 \leq y \leq 9$
④ $-7 \leq y \leq 0$ ⑤ $0 \leq y \leq 8$

4

2次式 $f(x) = (x + 2)^2 + 5(x + 2) + 6$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(2)$ の値を求めよ。

- ① -4 ② 0 ③ 4 ④ 20 ⑤ 42

(2) $f(x)$ を因数分解せよ。

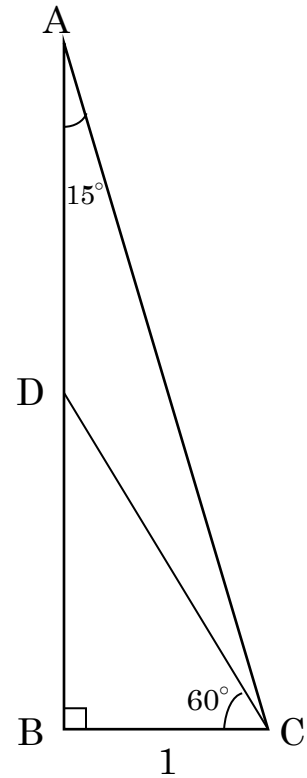
- ① $f(x) = (x + 2)(x + 3)$ ② $f(x) = (x + 3)(x + 4)$
③ $f(x) = (x + 4)(x + 5)$ ④ $f(x) = (x + 4)^2$
⑤ $f(x) = (x + 6)^2$

(3) $f(x) = 0$ の解を求めよ。

- ① $x = -5, -4$ ② $x = -4, -3$ ③ $x = -3, -2$
④ $x = -6$ ⑤ $x = -4$

5

右図の三角形ABCについて、
 $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$, $BC = 1$ のとき、
 この三角形を利用して次の問いに答えよ。



(1) $\tan 75^\circ$ を求めよ。

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $1 + \sqrt{2}$ ④ $1 + \sqrt{3}$ ⑤ $2 + \sqrt{3}$

(2) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\tan 75^\circ \tan \theta = 1$ を満たす θ の値を求めよ。

- ① $\theta = 15^\circ$ ② $\theta = 30^\circ$ ③ $\theta = 60^\circ$ ④ $\theta = 105^\circ$
 ⑤ $\theta = 135^\circ$

(3) $\cos 75^\circ$ を求めよ。

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

解答

1 (1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 3 (5) 1

2 (1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 1 (5) 4

3 (1) 5 (2) 1 (3) 3 (4) 2

4 (1) 5 (2) 3 (3) 1

5 (1) 5 (2) 1 (3) 5

レベルおよび解答時間

1~4

(1) 基本 2分

(2) (3) 標準 3分

(4) (5) 応用 4分

5

(1) 基本 2分

(2) 標準 3分

(3) 応用 4分

解説

1

(1) $(-m)^2 = m^2$, $-(-m)^2 = -m^2$ など、べき乗数の符号に注意する。

$$\begin{aligned} a &= -3, b = -2 \text{ を与式に代入して、} \\ & -a^2 + 3a + b^2 - 2b - 7 \\ &= -(-3)^2 + 3 \times (-3) + (-2)^2 - 2 \times (-2) - 7 \\ &= -9 - 9 + 4 + 4 - 7 \\ &= -17 \end{aligned}$$

(2) $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^m = a^m b^m$ など、累乗の指数計算に注意する。

$$\begin{aligned} & (-3xy^3)^2 \times (2xy)^3 \\ &= (-3)^2 \times x^2 \times (y^3)^2 \times 8x^3y^3 \\ &= 9x^2y^6 \times 8x^3y^3 \\ &= 72x^5y^9 \end{aligned}$$

(3) $3A + B$ に直接式を代入する前に、 A と B の式として考える。

$$\begin{array}{r} \text{(第1式)} \times 2 \\ \text{(第2式)} \quad + \end{array} \quad \begin{array}{r} 2(A+B) = 2A + 2B = 2x^2 + 4x + 2 \\ A - B = 3x^2 - 10x + 7 \\ \hline 3A + B = 5x^2 - 6x + 9 \end{array}$$

(4) 多項式を文字に置き換えて計算する。 $x + 2 = P$ と置き換える。

$$\begin{aligned} (x + y + 2)(x - y + 2) &= (P + y)(P - y) \\ &= P^2 - y^2 \\ &= (x + 2)^2 - y^2 \\ \text{さらに展開公式 } (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ より} \\ \text{(上の式)} &= x^2 + 4x + 4 - y^2 \\ &= x^2 + 4x - y^2 + 4 \end{aligned}$$

(5) $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ (ただし $a, b > 0$) を用いて分母を有理化する。

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 1 \\ x + y &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

なので、

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = 1 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

- (1) 二つの集合 A, B が $A \subset B$ を満たすとき、 A の要素は必ず B の要素である。

よって x, y はともに 2, 6, 7, 8 のいずれかである。

$$\therefore x = 2, y = 6$$

- (2) 条件文「 $P \Rightarrow$ (ならば) Q 」が成り立つとき、

「 P は(Q であるための)十分条件、 Q は(P であるための)必要条件」である。

「 $x = 3 \Rightarrow x^4 = 81$ 」は成り立つが、「 $x^4 = 81 \Rightarrow x = 3$ 」は成り立たない。

(反例は $x = -3$)

\therefore 十分条件であるが、必要条件でない。

- (3) 与式からまず a と $-b$ の範囲を考える。

$$\text{(第1式)} \quad -3 \leq a < 2$$

$$\text{(第2式)} \quad -5 < -b \leq -1$$

上の2式の辺々を足して $a - b$ の範囲を求めるとき、

左2辺の不等号は「2式とも等号がついているわけではない」ので、

$$\text{等号のない方にとって、} -8 < a - b$$

右2辺の不等号も「2式とも等号がついているわけではない」ので、

$$\text{等号のない方にとって、} a - b < 1$$

$$\therefore -8 < a - b < 1$$

- (4) 絶対値不等式 $|a| \leq p$ の解は、 $a = 0$ のときも成り立てば

$$-p \leq a \leq p \quad (\text{ただし } p > 0)$$

$$|3x - 6| \leq 12 \quad \text{より}$$

$$-12 \leq 3x - 6 \leq 12$$

$$-6 \leq 3x \leq 18$$

$$-2 \leq x \leq 6$$

これは

$$3x - 6 = 0$$

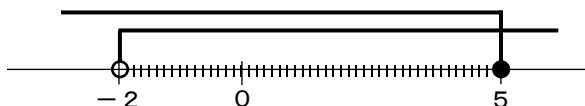
$$x = 2$$

のときも成り立つ。 $\therefore -2 \leq x \leq 6$

(5) 簡単そうで間違えやすい。同類項の移項と不等号の向きに注意する。

$$\begin{array}{ll} \text{第1式より} & -2 < x & x > -2 \\ \text{第2式より} & 2x \leq 10 & x \leq 5 \\ & & \therefore -2 < x \leq 5 \end{array}$$

連立不等式の範囲算出に慣れていなければ、数式や論理だけで無理に導こうとせずに、数直線も利用して確実に解きましょう。



3

(1) 2次関数の最大値、最小値を求める場合、 $y = a(x - p)^2 + q$ (ただし $a \neq 0$) の形に変形する。(2次式の平方完成)

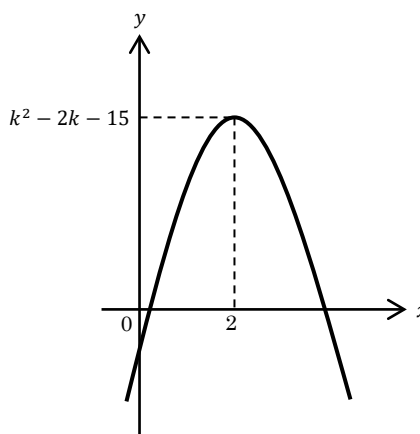
$y = a(x - p)^2 + q$ は
 $a > 0$ のとき、 $x = p$ のとき最小値 q
 $a < 0$ のとき、 $x = p$ のとき最大値 q
 をとる。

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x + k^2 - 2k - 19 \\ &= (-x^2 + 4x - 4) + 4 + k^2 - 2k - 19 \\ &= -(x - 2)^2 + 4 + k^2 - 2k - 19 \\ &= -(x - 2)^2 + k^2 - 2k - 15 \end{aligned}$$

よって $x - 2 = 0$ つまり $x = 2$ のときに最大値 $k^2 - 2k - 15$ をとる。

(2) この2次関数の2次係数は $-1 < 0$ なので、
 グラフは右図の通り、上向きに山がある。
 よってこのグラフが x 軸と2点で交わるのは、
 頂点が x 軸より上にある場合。

よって求める k の範囲は
 $k^2 - 2k - 15 > 0$
 左辺を因数分解して
 $(k + 3)(k - 5) > 0$
 $k < -3, k > 5$



(3) 「この2次関数のグラフが原点を通る」ので、 $x = 0$ のとき $y = 0$

$$k^2 - 2k - 19 = 0$$

$$k^2 - 2k + 1 = 20$$

$$(k - 1)^2 = 20$$

$$k = 1 \pm 2\sqrt{5}$$

(4) 範囲指定がある2次関数の最大値、最小値は、右図のようにグラフ化するとわかりやすい。

$k = 6$ なので、与式は

$$y = -(x - 2)^2 + 9$$

となるが、この場合 $x = 2$ は $3 \leq x \leq 5$ の範囲外なので、 $y = 9$ は最大値とならない。

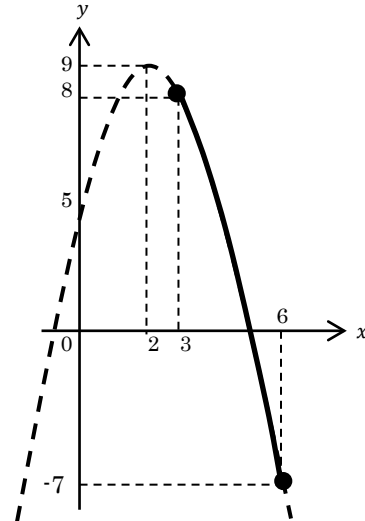
また

$$x = 3 \text{ のとき } y = 8$$

$$x = 6 \text{ のとき } y = -7$$

なので、

$$-7 \leq y \leq 8$$



4

(1) 与式に $x = 2$ を代入する。

$$f(2) = 4^2 + 5 \times 4 + 6 = 42$$

(2) $x + 2 = X$ と置き換える。

因数分解の公式 $X^2 + (a + b)X + ab = (X + a)(X + b)$ から

$$f(x) = (x + 2)^2 + 5(x + 2) + 6$$

$$= X^2 + 5X + 6$$

$$= (X + 2)(X + 3)$$

$$= ((x + 2) + 2)((x + 2) + 3)$$

$$= (x + 4)(x + 5)$$

(3) $f(x) = (x + a)(x + b) = 0$ の解は $x = -a, -b$

$$\therefore x = -5, -4$$

- (1) 右図の通り角度が確定するので、
 $\triangle ADC$ は $AD = DC$ の二等辺三角形
 であり、
 $BD = \sqrt{3}$, $CD = AD = 2$
 であることがわかる。

$$\tan 75^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{AD+DB}{BC} = 2 + \sqrt{3}$$

- (2) $\tan 75^\circ = \frac{AB}{BC}$ なので $\tan \theta = \frac{BC}{AB}$

よって $0^\circ < \theta < 180^\circ$ つまり $\triangle ABC$ 内では
 $\theta = \angle A = 15^\circ$

- (3) 三角関数の公式 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より、 $\theta = 75^\circ$ として

$$1 + (2 + \sqrt{3})^2 = \frac{1}{\cos^2 75^\circ}$$

$$1 + 7 + 4\sqrt{3} = \frac{1}{\cos^2 75^\circ}$$

$$8 + 4\sqrt{3} = \frac{1}{\cos^2 75^\circ}$$

ここで平方根の式の因数分解 $a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (ただし $a, b > 0$) を用いて

$$8 + 2\sqrt{12} = \frac{1}{\cos^2 75^\circ}$$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 75^\circ}$$

$\cos 75^\circ > 0$ より

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = \frac{1}{\cos 75^\circ}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

さらに分母を有理化して

$$\cos 75^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

