

ジオデシック・ドーム設計支援ツールの開発

Development of geodesic dome design support tool

徳 富 肇 *1

TOKUTOMI Hajime

要約 ジオデシック・ドーム (geodesic dome) とは、Richard Buckminster Fuller(1895-1983)によって考案された球状の構造体である。ジオデシック・ドームを設計するためには、外接する球の半径および正二十面体の一辺の分割数を決め、節点の座標を計算する必要がある。ここでは表計算ソフトを使って座標を計算し、得られたデータを使って三次元 CAD でジオデシック・ドームの基準線を自動作図するツールの開発を行う。

1 ジオデシック・ドームについて

正二十面体は、5種類ある正多面体の中では最も球に近い。正二十面体からジオデシック・ドームを作成する手順を、下記に示す。

①正二十面体の1辺を n 等分し、相対する節点を結び、正二十面体の1面は n^2 個の合同な小正三角形に分割される。②正二十面体の中心と分割した小三角形の頂点を通る線と、正二十面体の中心を原点とする半径 r の球(S)の交点を求めると、ジオデシック・ドームの頂点を得られる。③前項で求めた隣り合う節点を結び、ジオデシック・ドームの辺を得る。(図1)

分割数を増やすに従って、多面体は球に近似してゆく。

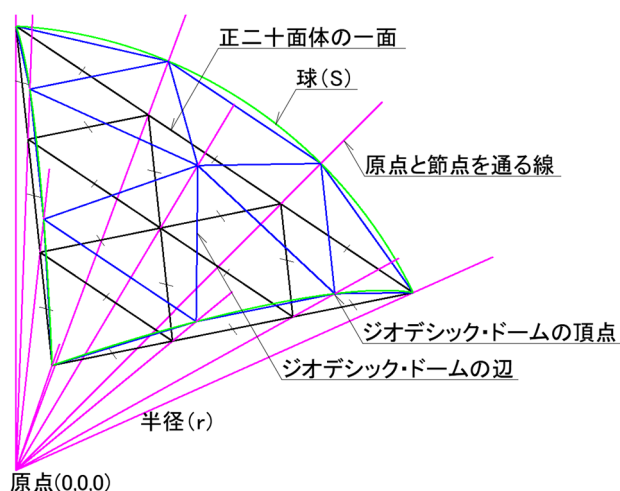


図1 ジオデシック・ドーム (3分割の例)

2 節点座標の計算

本章では、ドームの半径 r と正二十面体の一辺の分割数 n を与えれば、ジオデシック・ドームの節点座標を計算するところまでを扱う。プログラミングは、Excel VBAを用いる。

(1) 正二十面体の作成

正二十面体の12個の節点座標は、次のとおりである。ここで G は黄金比である(図2)。

$$1, 2, 3, 4 (\pm G, 0, \pm 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$5, 6, 7, 8 (0, \pm 1, \pm G) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$9, 10, 11, 12 (\pm 1, \pm G, 0) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$G = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

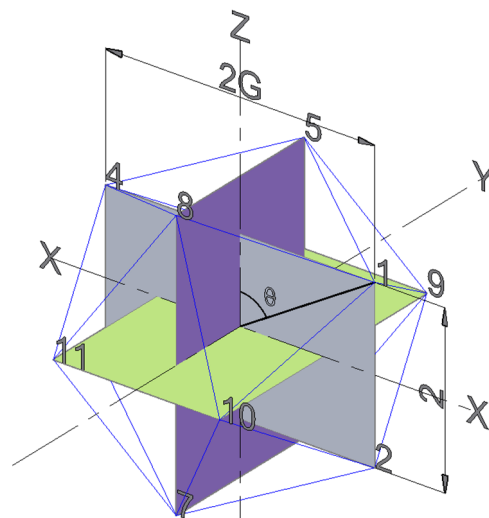


図2 黄金比を使った正二十面体の頂点

*1 住居環境科 Department of Housing Environment

(2) 座標変換 (Y 軸回りに回転)

図 2 の節点 1 がドームの頂点が最高の高さとなるようにするため、全ての頂点を Y 軸回りに θ 回転させる。元の座標を (x, y, z) 、座標変換を行ったあとの座標を (X, Y, Z) とすれば、 X, Y, Z は次式で求められる。

(図 3)

$$X = x \cos \theta - z \sin \theta \cdots \textcircled{4}$$

$$Y = y \cdots \textcircled{5}$$

$$Z = x \sin \theta + z \cos \theta \cdots \textcircled{6}$$

$$\text{ここで、} \theta = \tan^{-1} G : G = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

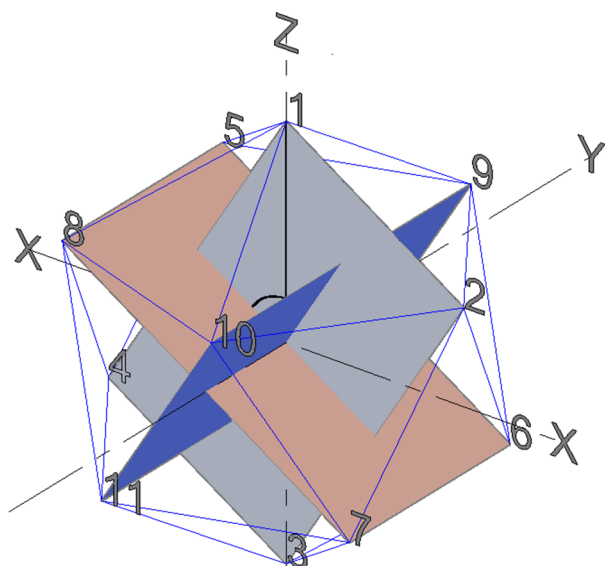


図 3 座標変換後

(3) ジオデシック・ドームに使用する部分

座標変換 (Y 軸回りに回転) により得られる正二十面体を、図 4 に示す。ジオデシック・ドームでは、地盤面をどの高さに設定するかによって、表情が異なる。

ここでは、正二十面体を上部 15 面と下部 5 面に分け、境界線が地盤面となるようにする。これによって、より球体に近い構造体としてジオデシック・ドームを表現できる。

また、図 4 に示すように、正二十面体の面に仮に A、B、C と名前を付けるとすると、A 面、B 面、C 面をそれぞれ 72° ずつ 4 回、Z 軸回りに回転させることによって上部 15 面体を構成することができる。

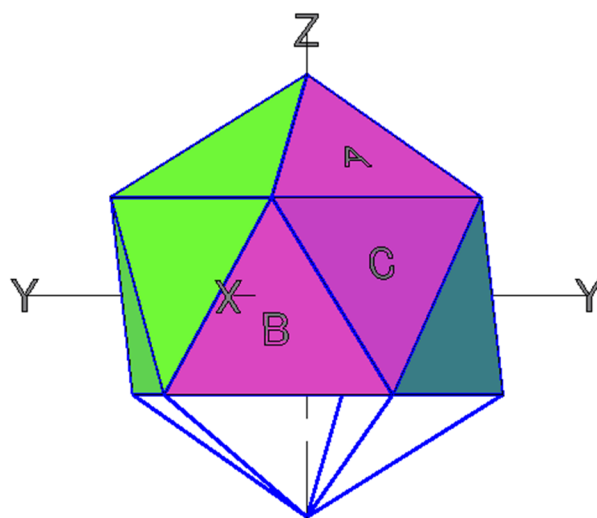


図 4 ジオデシック・ドームに使用する部分

(4) 辺の n 等分と内分点の座標

一般的な正三角形 $P(x_P, y_P, z_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ 、 $R(x_R, y_R, z_R)$ を頂点とする正二十面体の一つの面について、次の手順に従って分割を行う (図 5)。

①線分 PQ を n 等分し、等分した線分の両端に節点を設ける。②線分 PR を n 等分し、等分した線分の両端に節点を設ける。③線分 PQ 上及び線分 PR 上の節点を、頂点 P に近い方から順に結んでゆき、辺 QR に平行な線分の組を作る。④線分の組を、頂点 P に近い方から 2 段、3 段、…と定義する。ここで、頂点 P を 1 段とすれば、頂点 Q と頂点 R は n+1 段となる。⑤2 段の線分を 1 等分、3 段の線分を 2 等分、…、i 段の線分を (i-1) 等分し、等分した線分の両端に節点を設ける。

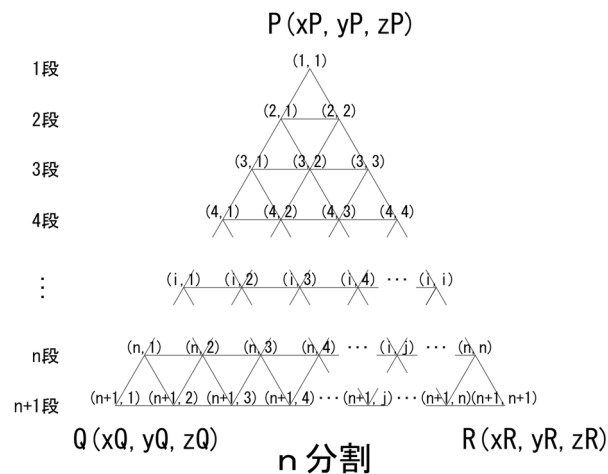


図 5 内分点の座標

プログラミングを容易にするため、i 段の、(線分 PQ

に近い方から)j番目の節点を(i,j)と示す。



図6 展開図に記載した節点番号

(5) 節点番号の割り振り

CADで自動的に線分を描くためには、始点と終点の座標値が必要となる。始点 $i(x_i, y_i, z_i)$ から終点 $j(x_j, y_j, z_j)$ に線分を描く場合、節点に番号を割り振っておき、節点番号を指定すれば自動的に座標を呼び出せるようにしておく必要がある。

節点番号の規則性(数列)を調べるために、正二十面体の上部15面の展開図を示す(図6)。例えば3段について、各小三角形の1番目の節点番号は、7→9→11→13→15となっている。この節点番号 $N(i,j,k)$ は、段数(i)、順番(j)と回転数(k)を使って、次のように示すことができる。

$$N(i, j, k) = \frac{5(i-1)(i-2)}{2} + (i-1)k + j + 1 \dots \textcircled{7}$$

ただし、 $i \geq 2, k=0,1,2,3,4$

(6) 球面への投影

原点(0,0,0)と (x_1, y_1, z_1) を結ぶ直線の方程式は、次式で表される。

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = t \dots \textcircled{8}$$

また、中心(0,0,0)、半径rの球は、次式で表される。

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \dots \textcircled{9}$$

⑧式を、

$$x = t \cdot x_1 \dots \textcircled{10}$$

$$y = t \cdot y_1 \dots \textcircled{11}$$

として、⑨式に代入すると、

$$t^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = r^2$$

tについて解くと、

$$t = \frac{r}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \dots \textcircled{12}$$

求められたtを、⑩⑪⑫式に代入すれば、直線と球の交点の座標が得られる。

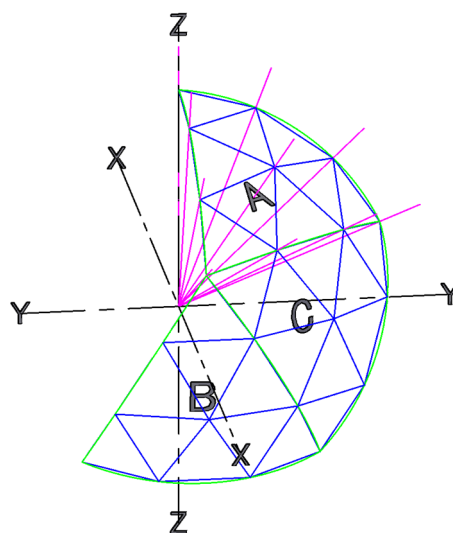


図7 球面への投影

(7) 節点番号と節点座標の関連付け

ここまでの手順で、節点番号と節点座標とが計算された。次の第3章で、自動作図するための前準備として、「節点番号を指定すれば、対応する座標が呼び出される」ように関連付けを行う。Excel VBAを利用して

いるので、VLOOKUP 関数を用いることとする。

3 3次元CADでの自動作図

本章では、第2章で計算したジオデシック・ドームの節点座標を用いて、3次元CADで作図を自動化する部分を扱う。CADソフトウェアは、AutoCAD を使用する。

(1) 始点と終点の節点番号

CADで作図するためには、始点と終点の座標が必要である。第2章(7)で、節点番号と座標の関連付けを行ったので、始点と終点の節点番号の組み合わせを作成する。例えば、図7の3分割の例では、次の節点番号の順番で線分を描くことができる。

1~2 段 : 1→2, 2→3, 1→3, 3→4, 1→4, 4→5, 1→5, 5→6, 1→6, 6→2*

2~3 段 : 2→7, 7→8, 2→8, 3→8, 8→9, 3→9, 9→10, 3→10, 4→10, 10→11, 4→11, 11→12, 4→12, 5→12, 12→13, 5→13, 13→14, 5→14, 6→14, 14→15, 6→15, 15→16, 6→16, 2*→16, 16→7*

1~2段のみは他段と異なるが、2~3段、3~4段、...、以降は同じ処理で節点番号の組を数式化することができる。ただし、*印を付した節点番号は、次の段の節点番号ではなく同じ段の節点番号としなければならないため、条件式(if)を使ったプログラミング上の処理が必要となる。

(2) スクリプトの作成

AutoCAD で使用するコマンドは、スクリプトファイルに記載しておき、一括で実行することができる。例えば(x₁,y₁,z₁)から(x₂,y₂,z₂)に線分を作成する場合は、下記のコマンドとなる。

line_ x₁,y₁,z₁_ x₂,y₂,z₂_

ただし、「_」(アンダーバー)の部分は、実際は半角のブランクを使うが、説明のためこのように表した(以下、いくつかのコマンドを説明するが同様とする)。

実用に際しては、(x₁,y₁,z₁)の座標値が、I5、J5、K5のセル、(x₂,y₂,z₂)の座標値がM5、N5、O5のセルに格納されていた場合、下記のようなコマンドを使って文字列化する。

= "line"&"_ "&I5&" "&J5&" "&K5&"_ "&M5&" "&N5&" "&O5&"_ " ...⑬

因みに、最初の「=」は数式入力、「」(ダブルクォーテーション)で挟まれた部分は文字列化、「&」は文字列の結合を意味する。

また、節点番号が H5 のセルに格納されており、

(x₁,y₁,z₁)の位置に、文字の高さ 10、文字の角度 0° で節点番号を表示する場合は、下記のコマンドとなる。

= "text"&"_ "&I5&" "&J5&" "&K5&"_ "&10&"_ "&0"&" "&H5&"_ " ...⑭

(3) スクリプトの実行

「メモ帳」などのテキストエディタにコマンドを貼り付けて保存する。拡張子を「.txt」から「.scr」に変更し、AutoCAD の「スクリプト実行」コマンドを実行することにより、データが自動作図される。

4 結果の表示

半径 r=1000、分割数 n=3 として計算した結果の一部を次に示す。

表1 正二十面体の分割 表2 球面への投影

三角形の座標				三角形の座標(投影)				
節点	X座標	Y座標	Z座標	節点 t	X座標	Y座標	Z座標	
1	0	0	1.9021	1	525.73	0	0	1000
2	0.5671	0	1.5516	2	605.32	343.28	0	939.23
3	0.1752	0.5393	1.5516	3	605.32	106.08	326.48	939.23
4	-0.459	0.3333	1.5516	4	605.32	-277.7	201.77	939.23
5	-0.459	-0.333	1.5516	5	605.32	-277.7	-201.8	939.23
6	0.1752	-0.539	1.5516	6	605.32	106.08	-326.5	939.23
7	1.1342	0	1.2011	7	605.32	686.56	0	727.08
8	0.5671	0.5393	1.2011	8	605.32	401.12	256.02	704.88
9	0.1752	0.5393	1.2011	9	605.32	449.36	130.05	314.9
10	-0.459	0.3333	1.2011	10	605.32	449.36	-130.05	314.9
11	-0.459	-0.333	1.2011	11	605.32	65.56	854.73	-514.9
12	0.1752	-0.539	1.2011	12	605.32	65.56	854.73	-514.9
13	0.5671	-0.5393	1.2011	13	605.32	-276.4	850.65	-447.2
14	0.1752	-0.5393	1.2011	14	605.32	-276.4	850.65	-447.2
15	-0.459	0.3333	1.2011	15	605.32	-555.4	652.95	-514.9
16	-0.459	-0.333	1.2011	16	605.32	-555.4	652.95	-514.9
17	0.1752	0.5393	1.2011	17	605.32	-792.6	326.48	-514.9
18	0.1752	0.5393	1.2011	18	605.32	-792.6	326.48	-514.9
19	-0.459	0.3333	1.2011	19	605.32	-792.6	-326.5	-514.9
20	-0.459	-0.333	1.2011	20	605.32	-792.6	-326.5	-514.9
21	0.1752	-0.539	1.2011	21	605.32	-555.4	-653	-514.9
22	0.1752	-0.539	1.2011	22	605.32	-555.4	-653	-514.9
23	0.5671	-0.5393	1.2011	23	605.32	-276.4	-850.7	-447.2
24	0.5671	-0.5393	1.2011	24	605.32	-276.4	-850.7	-447.2
25	-0.459	0.3333	1.2011	25	605.32	65.56	-854.7	-514.9
26	-0.459	-0.333	1.2011	26	605.32	65.56	-854.7	-514.9
27	0.1752	0.5393	1.2011	27	605.32	449.36	-730	-514.9
28	0.1752	0.5393	1.2011	28	605.32	449.36	-730	-514.9

表1は、第2章(1)の座標を使って作図した正二十面体の辺を3分割した場合の、上部の15面にできる節点の座標値である。全部で76個の節点となる。

表2は、原点と表1の各節点を結ぶ線を、球面に投影した時の交点の座標を示す。表1の各座標値に表2のtを掛けたものが投影点の座標である。また、節点1は外接する半径1の球に接していることが判る。

表3に、ジオデシック・ドーム各辺の始点(i)と終点(j)の節点番号と、それぞれの座標値を示す。表3の節点番号に対応する座標値は、表2からVLOOKUP関数を使って読み込んでいる。全部で210の辺(要素)が生成される。

要素長(L)は、

図8、図9、図10は、作図したジオデシック・ドームである。判りやすくするため、ドームの最下の要素は、青色の太線に置き換えた。また、平面図には、⑮式を使って、節点番号を表示した。

5 考察

ジオデシック・ドームの施工例として、モンリオール・バイオスフィア(モンリオール万博アメリカ館)や富士吉田市立富士山レーダードーム館等が挙げられ、優れた構造体として、さらにランドマークとしても注目されてきた。

また、研究や制作物の対象としても興味深い構造体であり、実際に制作した例もインターネットなどで多数検索することができる。筆者も、分割数を2~4、主要な構造体をステンレスパイプ、角鋼管、フラットバー、木材などとし、接合の方法も色々な面から試して設計と制作を行ってきた[文献1~4]。いずれの場合も、座標の計算に多くの時間を費やしてきた。

パソコンの性能の向上や、3次元CADの進歩により必ずしも全ての節点の座標を算出しなくても、ジオデシック・ドームの設計や作図ができるようになった。しかし、今回、設計ツールの開発に取り組んだのは、様々なシミュレーションを行いたかったためである。

前述の設計法であれば、せつかく設計しても問題が生じれば一からやり直しという懸念があるが、今回のツールを用いれば、外接する球の半径 r と分割数 n という究極の2つの変数を設定するだけで設計から作図までを瞬時に行うことができる。

また、作図までを連動させているので、計算が間違っていないかどうかの検証を、図形として確認できる。さらに、節点の座標がデータとして得られるので、構造解析にもデータを流用できる利点もある。

表計算ソフトからCADソフトへのデータの受け渡しの部分で手作業が入るため、改良の余地はあるが、今回のツールの開発によって、当初の目的は達成することができた。今後、総合制作実習や開発課題でジオデシック・ドームに取り組む機会があれば、座標計算に費やしていた時間を、例えば接合部の納まりの工夫や、面材を使った場合の防水設計などに充てることができ、有用性が高いと考えている。

参考文献

- 1) 「Geodesic Dome～被災時における緊急シェルターの作製～」佐藤知美 鈴木好実 福森祥子
職業能力開発総合大学校東京校 開発課題 (平成16年度)
- 2) 「鉄骨造ドーム構造物の施工計画と施工管理」小笠原龍治 金谷将太 椛澤拓視 高橋翔 網島和寛 永井達也 長峰勇作 吉岡大輔
関東職業能力開発大学校 開発課題 (平成22年度)
- 3) 「ジオデシックドームの施工計画と施工管理」和田樹 上木原勝 本田愛 今屋将史 豊永香代 桃野真衣 原口ゆり子
九州職業能力開発大学校 開発課題 (平成28年度)
- 4) 「フラードーム設計支援ツールの開発と施工」増田悠矢 屋敷享 山口侑杜
千葉職業能力開発短期大学校 総合制作実習 (令和4年度)